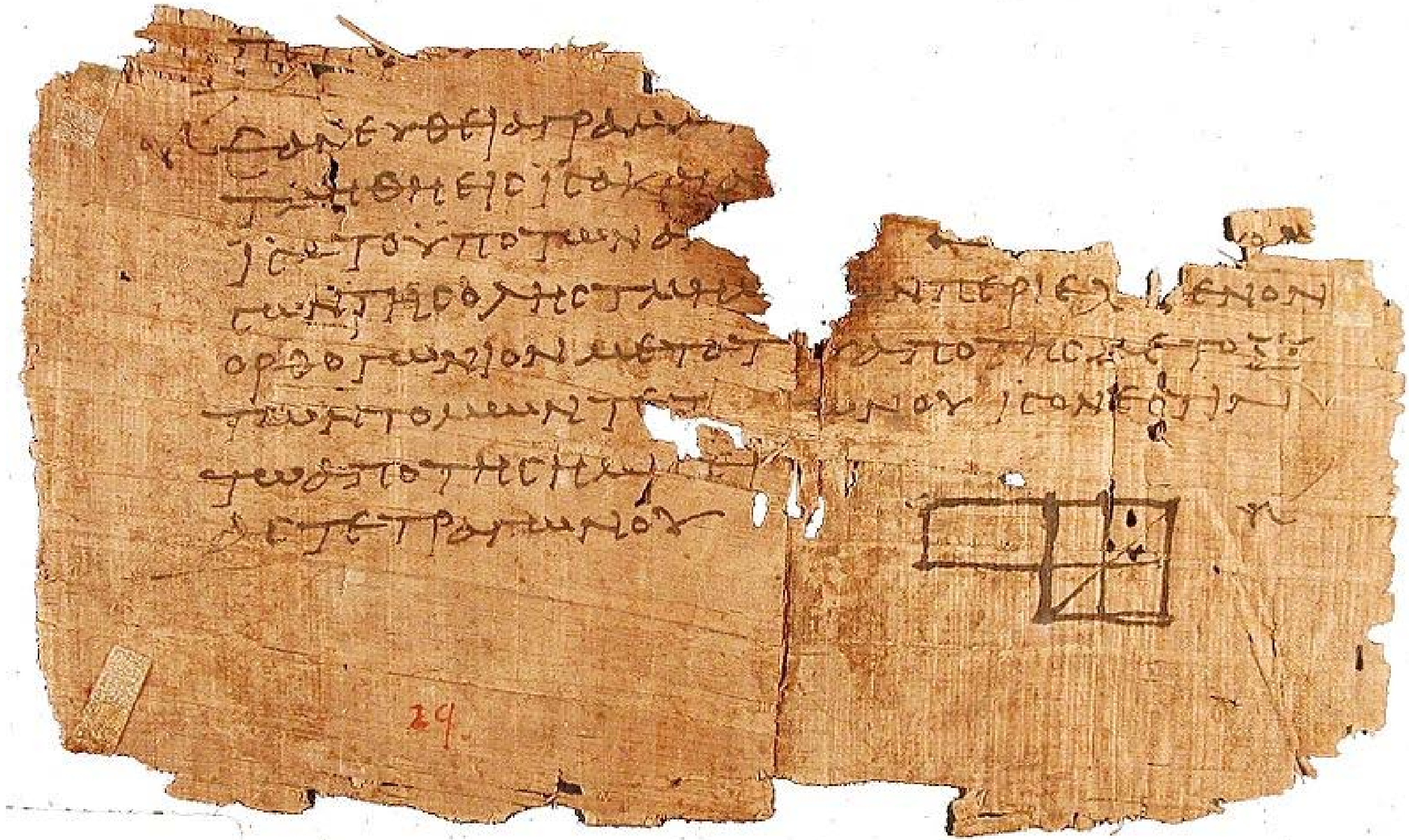
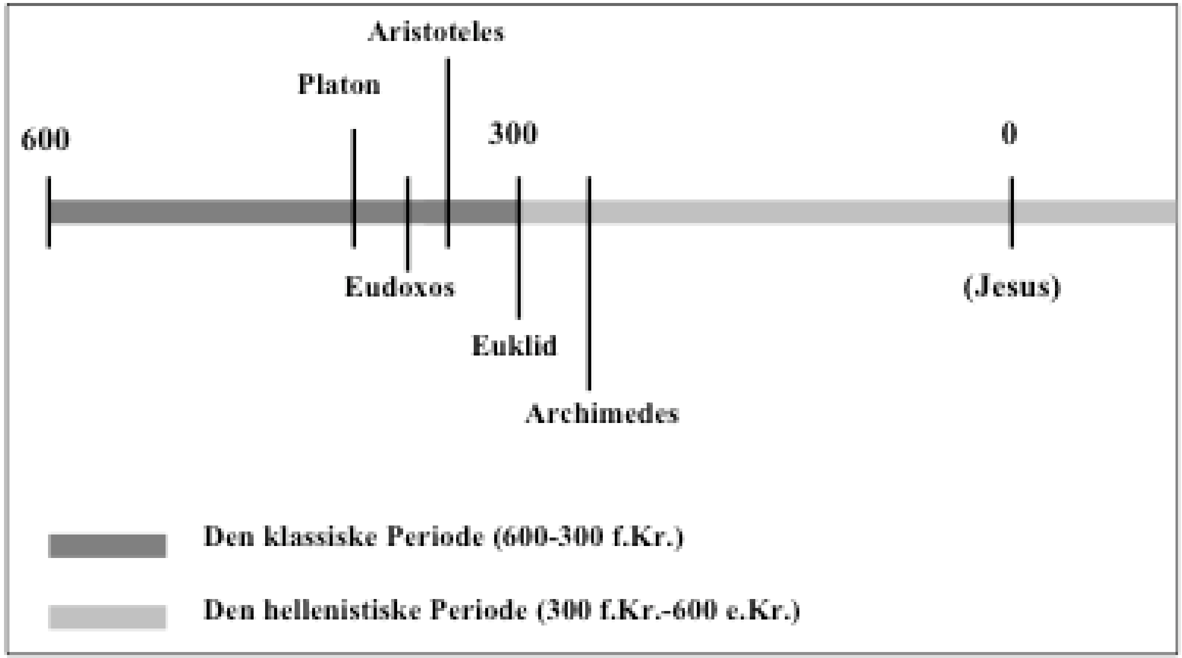
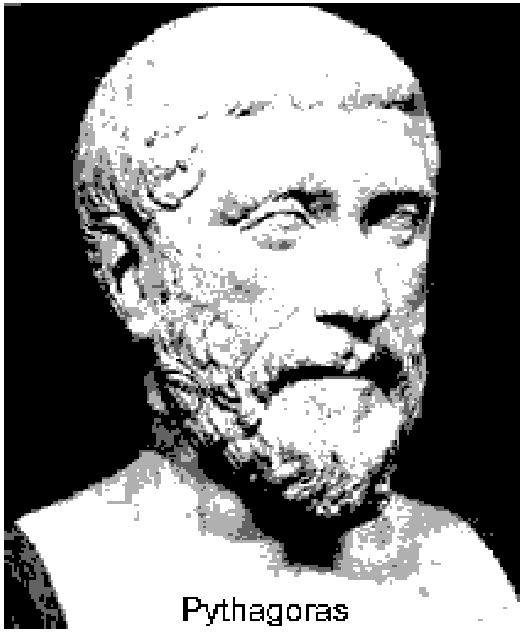
Matematikken i antikken



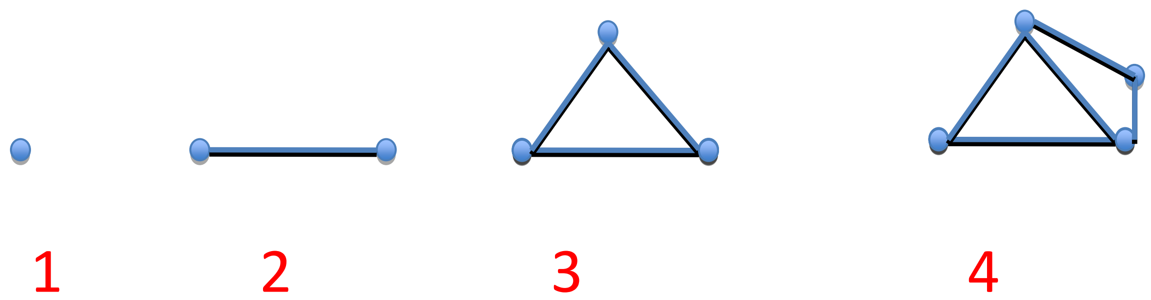

Aristoteles
Platon
600
300
0
Eudoxos
(Jesus)
Euklid
Archimedes
Den klassiske Periode (600-300 f.Kr.)
Den hellenistiske Periode (300 f.Kr.-600 e.Kr.)

Pythagoras (ca. 570 to ca. 490 f.Kr.)



da … de i tallene syntes at se mange ligheder til ting, som eksisterer og kommer til at eksistere, mere end i ild og jord og vand; da de igen så, at modifikationer og forhold i de musikalske skalaer kunne udtrykkes i tal; da således alle andre ting syntes i deres natur at kunne modellers i tal, og tal syntes at være de første ting i hele naturen, antog de, at tallenes elementer var alle tings elementer, og at hele himlen var en musikalsk skala og et tal. Og alle egenskaberne ved tal og skalaer, som de kunne vise at stemme overens med egenskaber og dele of hele himmelarrangementet, samlede de og passede dem ind i deres skema; og hvis der var manglede noget et eller andet sted, så tilføjede de beredvilligt noget, som gjorde hele deres teori kohærent. Da f.eks. tallet 10 ansås for at være fuldkomment og omfatte alle tallenes natur, sagde de, at der findes 10 himmellegemer. Men da der kun er 9 synlige legemer, opfandt de et tiende: kontra-jorden.
(Aristoteles: Metafysikken, Bog 1)

Tal og Geometrisk Form

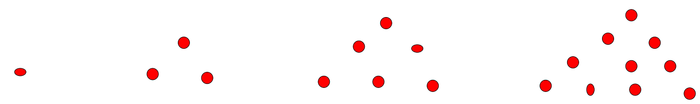


For pythagoræerne er der ingen forskel mellem tallet 1, et punkt eller den mindste materielle partikel. Der er fuldstændig parallelitet mellem forekomsten af geometriske objekter - som punkter, linjer, flader og rumlige figurer - materielle genstande og tal.

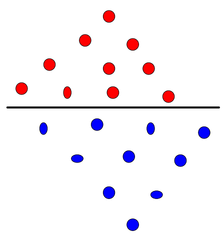
Pythagoræerne havde ikke en klar distinktion mellem det konkrete og det abstrakte. Det materielle og det begrebslige niveau var ikke klart adskilte. Endvidere syntes tal, som Aristoteles skriver, at være tilstede alle vegne.

Geometriske Tal

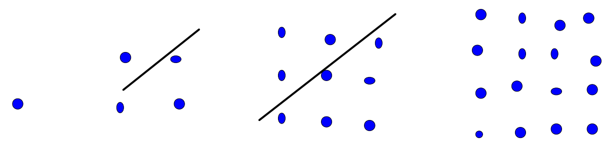
Trekantstal



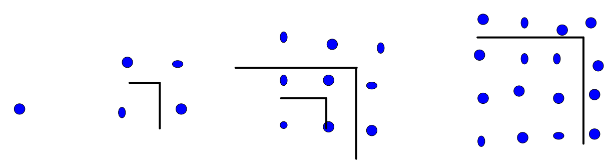
$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$



Kvadrattal



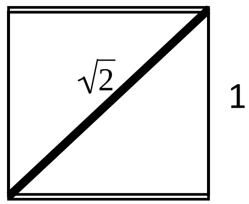
$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}+\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}=(n+1)^2$$



$1+3+\ldots+(2n+1) = (n+1)^2$

Inkommensurable størrelse

Kvadratrødder



$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \textit{hvor } p \textit{ og } q \textit{ er indbyrdes primiske}$$

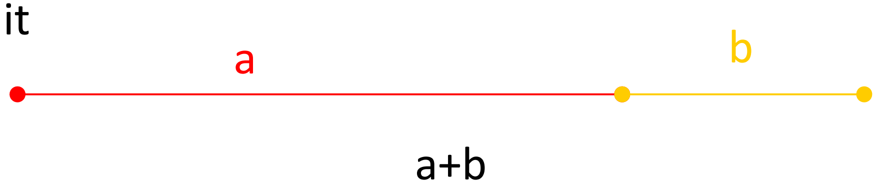
$$2 \cdot q^2 = p^2 \quad \textit{altså går } 2 \textit{ op i } p\textit{, dvs. } p = 2 \cdot r$$

$$2 \cdot q^2 = 4 \cdot r^2$$

$$q^2 = 2 \cdot r^2 \quad \textit{altså går } 2 \textit{ op i } q$$

Dette er i modstrid med, at p og q er indbyrdes primiske

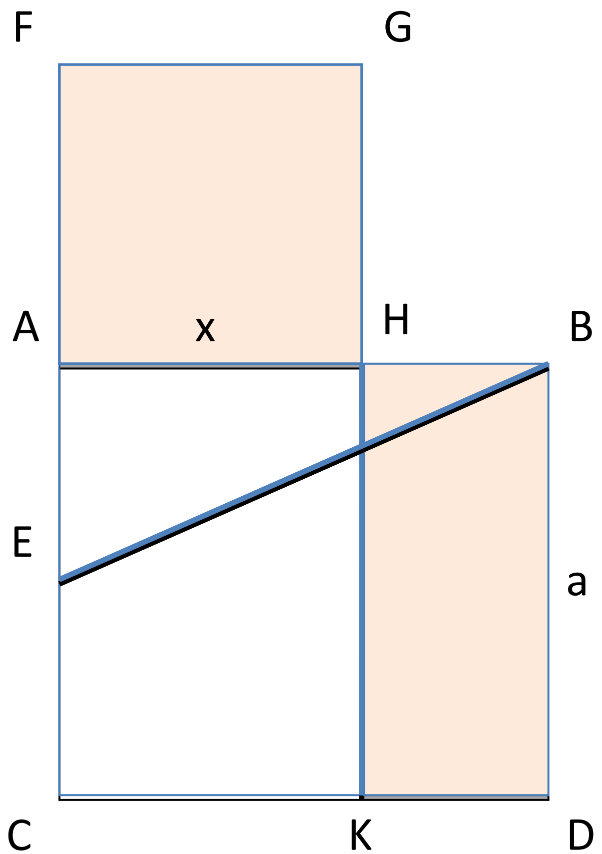
Det gyldne snit



Eukild, Bog VI, Definition 3. En ret linie siges at være blevet delt i **ekstremt** eller **middel forhold**, når hele linien [a+b] forholdes sig til den større del [a] som den større [a] til den mindre [b].

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887\ldots$$

Eukilds Elementer Proposition II, 11



Proposition II, 11. To cut a given straight line so that the rectangle contained by the whole and one of the segments is equal to the square on the remaining segment.
(Euclid's Elements, by Thomas L. Heath, vol. 1, p. 402)

AFGH = KHBD

$$\frac{CF}{CD} = \varphi$$

$$a^2 = x \cdot (x + a)$$

$$a^2 = x^2 + ax$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

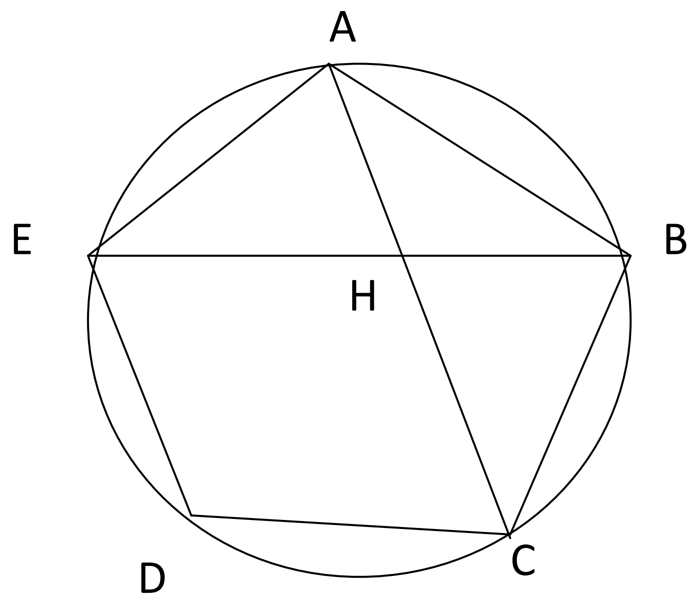
$$x = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{-a + \sqrt{5}a}{2} \\ \dfrac{-a - \sqrt{5}a}{2} \end{cases}$$

$$EF = \frac{a}{2} + \frac{-a + \sqrt{5} \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} a$$

$$CF = \frac{a}{2} + EF = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a = \varphi \cdot a$$

Euklid, XIII, Prop. 8



Prop. XIII,8. If in an equilateral and equiangular pentagon straight lines subtend two angels taken in order, they cut one another in extreme and mean ratio, and their greater segments are equal to the side of the pentagon.

(Euclid, vol III, p. 453)

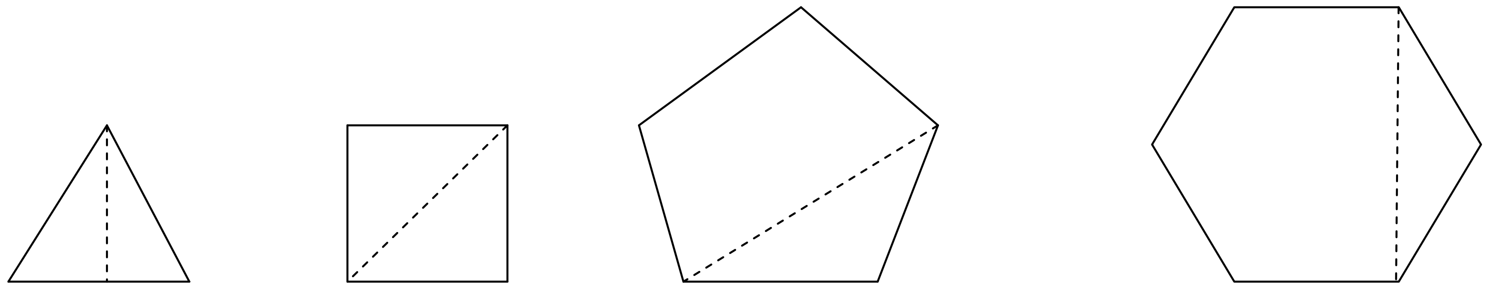
$$\frac{EH}{HB} = \varphi$$

$$EH = EA$$

$$\frac{EB}{EA} = \varphi$$

Diagonalen og kanten er i det gyldne forhold.

Harmoniske forhold I regulære polygoner



Kant	1	1	1	1
Diagonal		$\sqrt{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\sqrt{3}$

Linje-billedet 1

-Så forstil dig at du tager en linie der er delt i to ulige store liniestykker, til at repræsentere den intelligible verden og den synlige; del så igen hver af dem efter samme forhold. Derved får du en klassificering i grader af klarhed og uklarhed; i den synlige verden betegner den første underafdeling ”billeder”. Dermed mener jeg for det første skygger, derpå spejlinger i vand eller i en fast, glat og sleben overflade og hvad som helst af den slags.

…

-Lad så den anden underafdeling repræsentere den synlige verden som spejlbillederne giver en efterligning af, alt hvad naturen indeholder af levende og dødt, dyr og planter og menneskelige væsener.

…

- Er du så også rede til at indrømme at disse liniestykker er forskellige i grader af ægthed, og at spejlbilledets forhold til originalerne er analog med forholdet mellem formodningernes verden og kundskabernes?

Linje-billedet 2

-Giv nu agt på hvordan vi skal dele den linie der står for tænkningens verden: Du har to liniestykker. I det første bruger tanken billeder der tillige er originaler for efterligningerne i sansernes verden; og den er nødt til at basere undersøgelsen på forudsætninger for at nå frem; ikke til et første princip, men til en konklusion. Men i det andet bevæger tanken sig i modsat retning, fra forudsætning frem mod et første princip der er forudsætningsløst. Og dér gør den ingen brug af de billeder som blev anvendt på det foregående stade, men foretager undersøgelsen udelukkende ved former eller ideer.
-Det forstod jeg ikke rigtigt.
-Så tager vi det igen. … Du ved nok at de der beskæftiger sig med geometri og talteori, bruger visse forudsætninger: ulige og lige tal, og figurer, og tre forskellige slags vinkler, og beslægtede fænomener indenfor hver sit felt. Dem betragter de som kendte, idet de forudskikker dem som grundlæggende antagelser som det er unødvendigt at bevise både for sig selv og andre, fordi de er indlysende for enhver. Med dem som udgangspunkt går de frem skridt for skridt med indre konsekvens mod den konklusion de har sat sig som mål.
-Ja, det ved jeg udmærket.
-Og du ved også at de til hjælp tager synlige figurer hvorover de drager deres slutninger; men det er ikke figurerne de i virkeligheden tænker på; de er kun afbildninger. Genstandene for deres slutninger er f.eks. Firkanten selv og dens diagonal eller hvad det nu drejer sig om, til forskel fra den de tegner. Virkelighedens figurer, dem de former eller tegner, og som kan kaste skygge eller danne spejling i en vandoverflade, dem betragter de kun som afbildninger, men de virkelige genstande for deres undersøgelser er usynlige undtagen for tanken.

(Platon: Staten, 510b-e)

Linie-Billedet 3

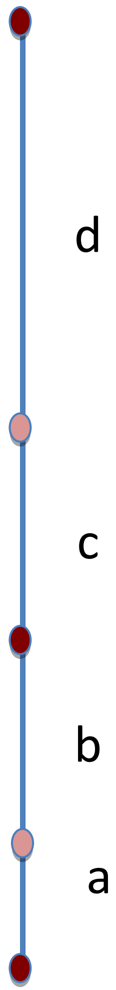
-Det var hvad jeg kaldte “tilgængelige for intellektet”, men sagde at tanken vel var nødt til at bruge forudsætninger I sin søgen, hvorimod den ikke går frem til et første princip, da den er ude af stand til at komme ud over eller bagved sine forudsætninger; men den bruger som billeder de genstande i vor sanselige verden, som igen selv kan danne afbildninger og skygger på det lavere plan; i sammenligning med disse afbildninger er fænomenerne højere agtet og værdsat.

…

-Angående det andet liniestykke indenfor intellektets område, må du forstå at jeg dermed mener alt hvad tankeprocessen opfatter ved dialektikkens hjælp, når den behandler sine forudsætninger, ikke som principielle udgangspunkter, men som virkelige forudsætninger, hypoteser; det vil sige som fodfæste og trin for en opstigning til noget som er forudsætningsløst og det sidste princip for alle ting; når du har grebet det, kan tanken atter stige nedad ved at følge vejen tilbage, nøje konsekvent og indtil konklusionen.

(Platon: Staten, 511a-b)

Linjebilledets Form



$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \frac{c+d}{a+b} = \quad "\varphi"$$

Det følger af disse forhold, at b = c.
Om forholdet er det gyldne snit er usikkert.

Linjebilledet

Aristoteles' Matematikopfattelse

Pointen er, at naturlige legemer har overflader og rumfang, længde og punkter, og de er genstandende for matematisk forskning.

…

[matematikere] er ikke interesseret i den kendsgerning, at overflader osv. danner grænserne for naturlige legemer, og de anser heller ikke disse legemernes egenskaber for egenskaber ved naturlige objekter.

…

Yderlig afklaring kommer fra de grene af matematikken, som er tættest på naturvidenskab (såsom optik, harmonilære og astronomi), da de på en måde er det modsatte af geometri: hvor geometri studerer naturligt forekommende linier, men ikke som de forekommer i naturen, studerer optikken matematiske linier, men som de forekommer i naturen snarere end som rene matematiske entiteter.

(Aristoteles: Fysik, 193b22-194a12)

Aristoteles' kritik af Idélæren

Man kan således først og fremmest stille spørgsmålet hvad overhovedet ideerne bidrager med til det sanselige For ideerne forklarer ikke nogen bevægelse eller forandring i sanselige objekter. Og vedrørende det ikke-sanselige bidrager ideerne ikke på nogen måde til viden om dem …

(Aristoteles: Metafysikken, 991a10-991a20)

Det værende hos Aristoteles

Alt værende kan, ifølge Aristoteles abstraktionslære, beskrives ud fra tre forskellige synsvinkler

1.Fysisk, idet man betragter legemerne i deres materialitet og med de dertil knyttede egenskaber som f.eks. bevægelse og hvile, varme og kulde osv. På dette trin abstraherer man kun fra de individuelle egenskaber ved en klasse af fænomener, om hvilken man derefter kan udsige generelle "fysiske love".

2. **Matematisk**, idet man abstraherer fra legemernes materielle egenskaber og alene betragter deres antal, størrelse og geometriske form. Derved fremkommer generelle relationer, som udgør matematikkens love.

3.Metafysisk, idet man nu også abstraherer fra tingenes matematiske egenskaber og kun undersøger meget abstrakte relationer såsom kausalsammenhænge og eksistensproblemer.

Det uendelige findes

Men det er på den anden Side tydeligt, at det fører til mange umulige Konsekvenser, hvis man overhovedet ikke anerkender noget uendeligt. Så må der nemlig være en Begyndelse og en Ende på Tiden, og Størrelser kan ikke fortsat deles i Størrelser og Talrækken kan ikke være ubegrænset.

(Aristoteles: Fysik, Kap. 3, 206a)

Distinktionen mellem Potentiel og Aktuel Uendelighed

Men at der ikke eksisterer nogen **uendelig Størrelse som faktisk Virkelighed**, det har vi sagt; derimod kan en Deling stadig fortsættes (for det er ikke vanskeligt at gendrive Læren om udelelige Linjer).3 Der står da tilbage, at **det uendelige eksisterer som Mulighed**. Man skal nu ikke tage den mulige Væren i den Forstand, hvori man taler om, at dette har Mulighed for at blive en Statue og så også bliver til en Statue, og mene, at på samme Måde kan den uendelige Mulighed blive til uendelig Virkelighed. Men da Væren har mange Betydninger, som vi f.eks. siger, at Dagen er til og Kamplegen er til, og dermed mener, at den ene og den anden stadig kommer, så er det på samme Måde med det uendelige.

(Aristoteles, Fysisk, III.6.206a17-29)

Matematikere behøver kun det potentielt uendelige

Jeg har argumenteret for, at der ikke findes en aktuel uendelig ting, som er uoverstigelig; men det fratager ikke matematikerne deres studie. Som tingene er, behøver de ikke det uendelige, fordi de ikke gør nogen brug af det. Alt hvad de behøver er et endeligt linjestykke af vilkårlig, ønsket længde. Men en vilkårlig [lille] størrelse kan deles i samme forhold som en enorm stor størrelse, derfor gør det ikke nogen forskel for deres beviser om den størrelse, der foreslås, er en af dem, som faktisk findes.

(Aristoteles: Fysik, 207b27-34)

Forhold mellem to størrelser

Definition, V.4. Der består et forhold mellem to størrelser, A og B , hvis og kun hvis de ved mangedobling kan overgå hinanden, altså når der findes to tal, m og n , så:

$$n \cdot A > B \quad og \quad m \cdot B > A$$

Definition, V.5. Givet størrelserne A, B,C og D (af samme slags). Det gælder da, at A : B > C : D, hvis der findes et talpar, m, n , så

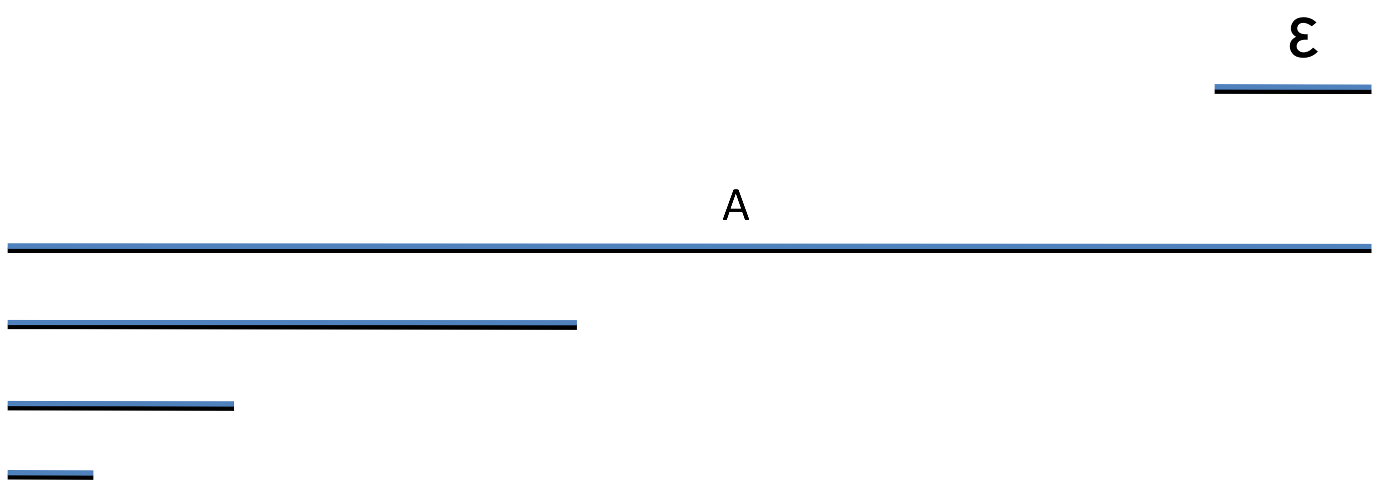
$$m \cdot A > n \cdot B \quad og \quad m \cdot C \leq n \cdot D$$

Definition 5 siger i moderne forstand, at en brøk, A/B, er større end en anden, C/D, hvis vi kan finde en rationel brøk mellem de to brøker. Dvs. Der findes naturlige tal, m, n, så

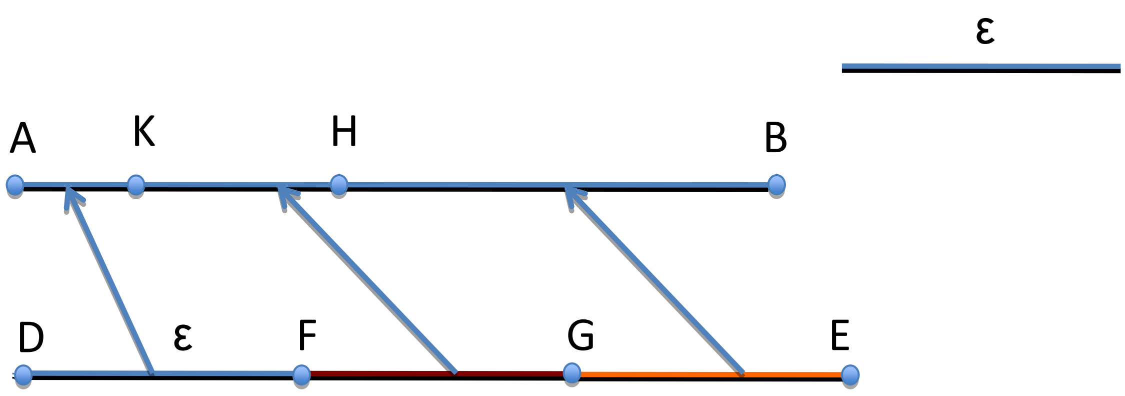
$$\frac{C}{D} \leq \frac{n}{m} < \frac{A}{B}$$

Udtømningsmetoden

Eukild. Bog X. Prop. 1. Givet to forskellige størrelser. Hvis der fra den største, A, fjernes mere end halvdelen, og der fra den resterende størrelse igen fjernes mere end halvdelen, og denne proces fortsættes, da vil resten blive mindre end den mindste af de to givne størrelser, ε.



Bevis for Euklid. X,1



ε lægges i forlængelse af sig selv et endeligt antal gange, så vi får et liniestykke, der er længere end AB. Vi får så

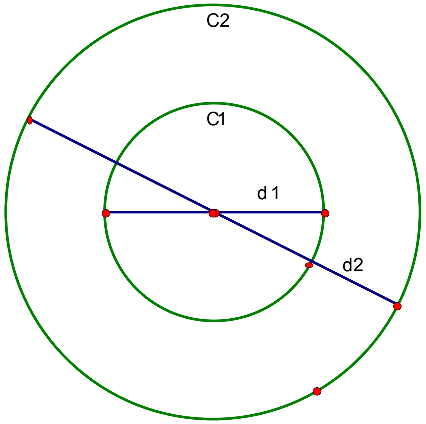
$$DG > AH$$

$$DF > AK$$

$$\varepsilon > AK$$

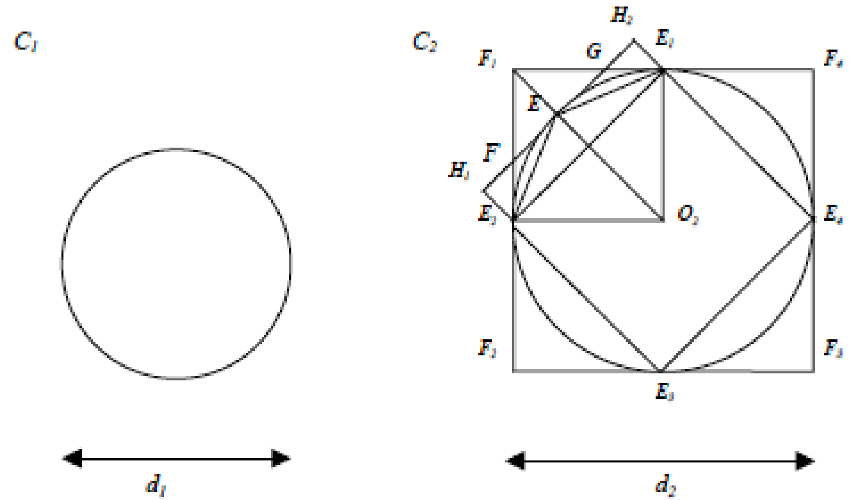
Udtømningsmetoden, et eksempel

Euklid, XII, 2. Forholdet mellem to cirkelarealer er lig med forholdet mellem kvadratet på cirklernes diametre.



$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Euklid. XII.2, Bevisskitse



Der findes et areal B, så $\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{C_1}{B}$. Euklid viser, at hverken B<A_2 eller B>A_2 er muligt.

Ad. B<A_2 : Kvadratet $E_1E_2E_3E_4$ indskrives i C_2, og kvadratet $F_1F_2F_3F_4$ omskrives. Arealet af $E_1E_2E_3E_4$ er halvdelen af arealet af $F_1F_2F_3F_4$, og udgør derfor mere end halvdelen af C_2. Buerne E_1E_2, ${}_1E_2E_3$, E_3E_4 og E_4E_1 halveres, og en ottekant, P_8, indskrives. Ottekanten fjerner mere end halvdelen af det, der var tilbage af cirklen. Derefter indskrives en 16-kant, P_{16}, som fjerner mere end halvdelen, osv. Der fortsættes indtil B<P_n<C_2.

I C_1 indskrives en polygon, Q_n, som er ligedannet med P_n, og vi får $\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{Q_n}{P_n}$ ifg. XII.1. Altså

$\frac{Q_n}{P_n} = \frac{C_1}{B}$ hvilket er en modstrid, da B<P_n og Q_n<C_1.