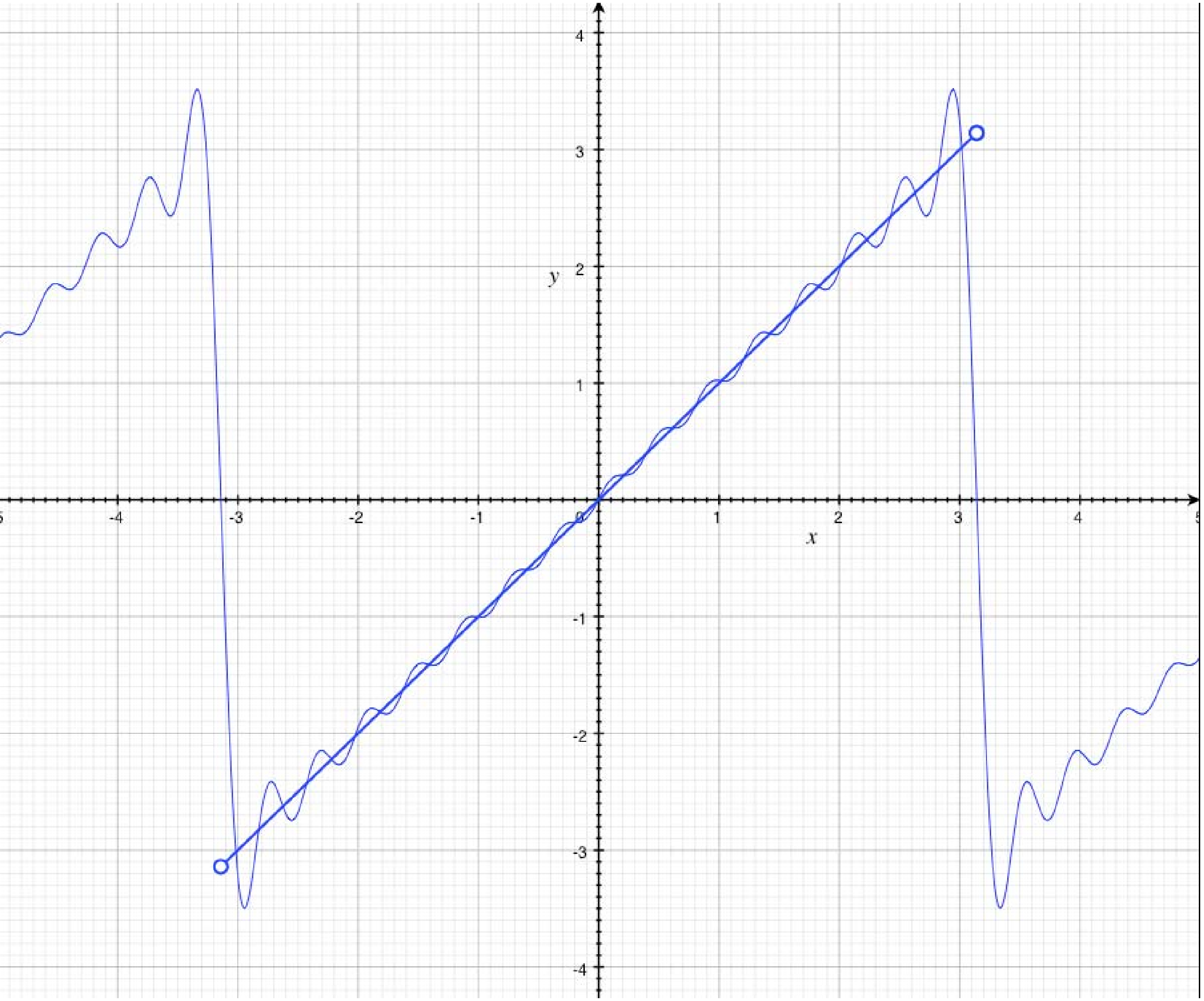
Fremkomsten af mængdelæren

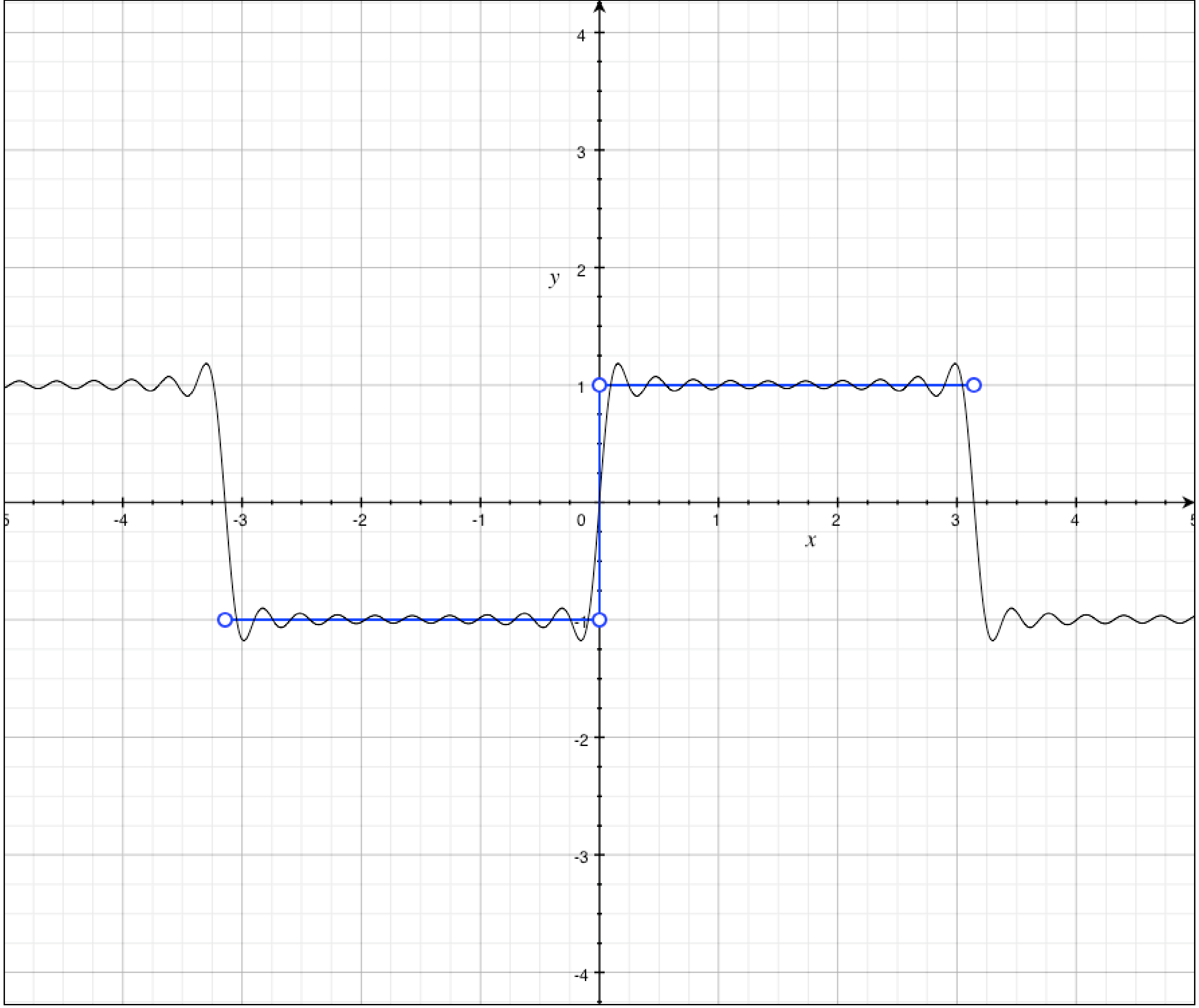
Stig Andur Pedersen



Fourier-række for f(x)=x

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx)$$
$$= 2\left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \cdots\right)$$

De første 15 led er taget med på kurven.



Fourier-række for f(x)

$$f(x) = \begin{cases} -1 & for \quad -\pi < x < 0 \\ +1 & for \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \cdots\right\}$$

Cantor's Theory of Real Numbers

Georg Cantor

(1845 – 1918)

Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.

[Math. Annalen Bd. 5, S. 123—132 (1872).]

Om udvidelse af en sætning fra teorien om trigonometriske rækker.

Convergence Fourier Series

Daß zwei trigonometrische Reihen

$$\tfrac{1}{2}b_0 + \sum(a_n \sin nx + b_n \cos nx) \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}b'_0 + \sum(a'_n \sin nx + b'_n \cos nx),$$

welche für jeden Wert von x konvergieren und dieselbe Summe haben, in ihren Koeffizienten übereinstimmen, habe ich im „Journal f. d. r. u. angew. Math. Bd. 72, S. 139" [hier II 2, S. 80] nachzuweisen versucht; in einer

At to trigonometriske rækker …. , som konvergerer for alle værdier x og har samme sum, stemmer overens med deres koefficienter, har jeg vist i …

Die *hier* beabsichtigte Ausdehnung besteht darin, daß für eine *unendliche* Anzahl von Werten des x im Intervalle $(0 \ldots 2\pi)$ auf die Konvergenz oder auf die Übereinstimmung der Reihensummen verzichtet wird, ohne daß die Gültigkeit des Satzes aufhört.

Den her foreslåede udvidelse består i, at der for et uendeligt antal af værdier af x i intervallet [0,2π] kan ses bort fra konvergens, uden at gyldigheden af sætningen ophører.

Real Numbers

Wenn ich von einer Zahlengröße im weiteren Sinne rede, so geschieht es zunächst in dem Falle, daß eine durch ein Gesetz gegebene unendliche Reihe von rationalen Zahlen

$$a_1, \; a_2, \; \dots \; a_n, \; \dots \qquad (1)$$

vorliegt, welche die Beschaffenheit hat, daß die Differenz $a_{n+m} - a_n$ mit wachsendem n unendlich klein wird, was auch die positive ganze Zahl m sei, oder mit anderen Worten, daß bei beliebig angenommenem (positiven, rationalen) ε eine ganze Zahl n_1 vorhanden ist, so daß $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, wenn $n \geq n_1$ und wenn m eine beliebige positive ganze Zahl ist.

Diese Beschaffenheit der Reihe (1) drücke ich in den Worten aus: „*Die Reihe* (1) *hat eine bestimmte Grenze b.*“

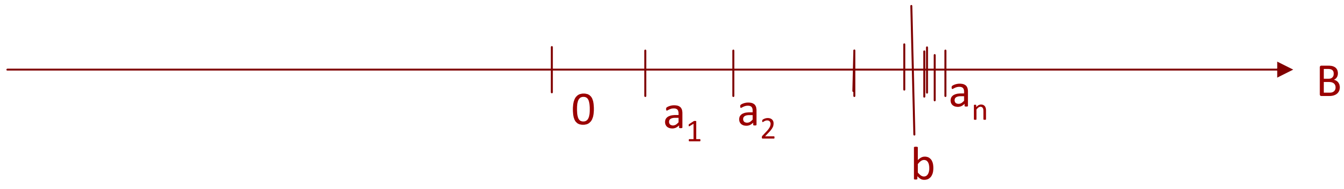
Cantor indfører reelle tal som Cauchy-følger.

Når jeg taler om en talstørrelse i videre betydning, så sker det først og fremmest i det tilfælde, hvor der ved en lovmæssighed foreligger en uendelig række af rationelle tal … , som har den egenskab, at differensen $a_{n+m} - a_n$ med voksende n bliver uendelig lille ligegyldig med hvad det positive tal m er, eller med andre ord for vilkårligt ε>0 findes et n_1 $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ når $n \geq n_1$ og m et vilkårligt helt positivt tal.

Denne beskaffenhed ved rækken (1) udtrykker jeg med ordene: ”rækken (1) har en bestemt grænse b.”

$$\forall \varepsilon \exists n_1 \forall n \geq n_1 \forall m : |a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$$

Regning med Reelle Tal



Mængden af alle tal konstrueret på denne måde betegnes B. Konstruktionen kan gentages hvilket giver et system C. Men C er ikke nogen udvidelse af B: C=B.

Men Cantor fortsætter alligevel udvidelsen og når frem til systemet L efter et passende antal udvidelser.

Alle ligninger vedrørende disse generelle tal kan reduceres til ligninger vedrørende rationelle tal. Det betyder i et moderne sprog, at de sædvanlige regneoperationer addition, subtraktion, multiplikation og division gælder for de nye tal.

Operationerne indføres koordinatvis:

$$(b_n)+(c_n)=(b_n+c_n)$$
$$(b_n)\bullet(c_n)=(b_n\bullet c_n)$$

Reelle Tal i Moderne Udgave

To Cauchy-følger (a_n) og (b_n) er ækvivalente, såfremt forskellen mellem elementerne I dem går mod nul, når n går mod uendelig

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N : \left| a_n - b_n \right| < \varepsilon$$

Svarende til Cauchy-følgen (a_n) defineres ækvivalensklasen

$$[(a_n)] = \left\{ (b_n) \middle| (a_n) \sim (b_n) \right\}$$

De reelle tal defineres som ækvivalensklasser af Cauchy-følger

$$R = \left\{ [(a_n)] \middle| (a_n) \text{ er en Cauchy-følge af Rationelle tal} \right\}$$

$$[(a_n)] \oplus [(b_n)] = [(a_n + b_n)]$$

$$[(a_n)] \otimes [(b_n)] = [(a_n \cdot b_n)]$$

The Axiom of Completeness

Daß nun ebenso auch die Zahlengrößen der Gebiete $C, D, \ldots$ befähigt sind, bekannte Entfernungen zu bestimmen, ergibt sich ohne Schwierigkeit. Um aber den in diesem § dargelegten Zusammenhang der Gebiete der in § 1 definierten Zahlengrößen mit der Geometrie der geraden Linie vollständig zu machen, ist nur noch ein *Axiom* hinzuzufügen, welches einfach darin besteht, daß auch umgekehrt zu jeder Zahlengröße ein bestimmter Punkt der Geraden gehört, dessen Koordinate gleich ist jener Zahlengröße, und zwar in dem Sinne gleich, wie solches in diesem § erklärt wird[1].

Ich nenne diesen Satz ein *Axiom*, weil es in seiner Natur liegt, nicht allgemein beweisbar zu sein.

Aksiom: Til enhver talstørrelse λ svarer der et punkt på den reelle tallinie.

Et punkt på den reelle tallinie kaldes et punkt af type λ, hvis det er bestemt ved en serie af type λ.

Point Sets

Eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Zahlengrößen nenne ich der Kürze halber eine *Wertmenge* und dem entsprechend eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Punkten einer Geraden eine *Punktmenge*. Was im folgenden von Punktmengen ausgesprochen wird, läßt sich dem gesagten gemäß unmittelbar auf Wertmengen übertragen.

Værdimængde: et endeligt eller uendeligt antal talstørrelser.

Punktmængde: et endeligt eller uendeligt antal punkter på en ret linie.

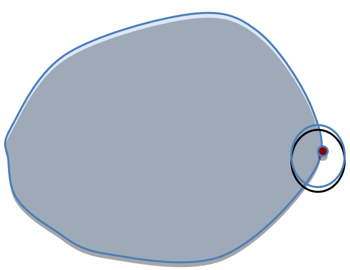
Fortætningspunkter

Wenn in einem endlichen Intervalle eine Punktmenge gegeben ist, so ist mit ihr im allgemeinen eine zweite Punktmenge, mit dieser im allgemeinen eine dritte usw. gegeben, welche für die Auffassung der Natur der ersten Punktmenge wesentlich sind.

Um diese abgeleiteten Punktmengen zu definieren, haben wir den Begriff *Grenzpunkt [„Häufungspunkt"] einer Punktmenge* vorauszuschicken.

Unter einem „Grenzpunkt einer Punktmenge *P*" verstehe ich einen Punkt der Geraden von solcher Lage, daß in jeder Umgebung desselben *unendlich* viele Punkte aus *P* sich befinden, wobei es vorkommen kann, daß er außerdem selbst zu der Menge gehört. Unter „Umgebung eines Punktes" sei aber hier ein jedes Intervall verstanden, welches den Punkt *in seinem Innern* hat.

a er et fortætningspunkt af P ↔ Der er uendelig mange punkter i en vilkårlig omegn af a. A behøver nødvendigvis ikke tilhøre P.



P' = mængden af fortætningspunkter af P

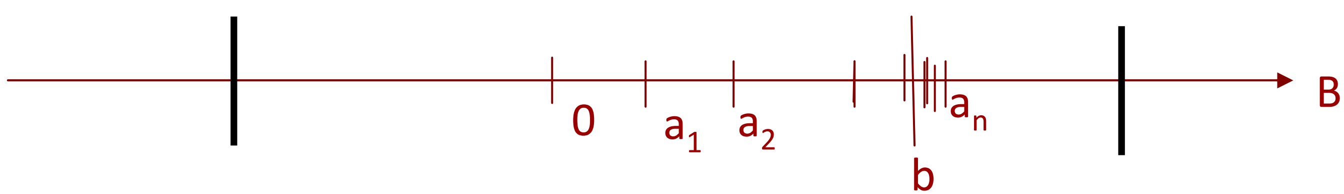
(Mængden af Rationelle Tal)' = Mængden af Reelle Tal

{1,1/2,1/3,…,1/n,…}' = {0}

Bolzano-Weierstrass's Theorem

Cantor formulerer Bolzano-Weierstrass's sætning, som siger, at enhver begrænset uendelig mængde af punkter på den reelle tallinie har et fortætningspunkt.

Darnach ist es leicht zu beweisen, daß eine aus einer unendlichen Anzahl von Punkten bestehende [„beschränkte"] Punktmenge stets zum wenigsten *einen* Grenzpunkt hat.



Point sets of v'th kind

Es ist nun ein bestimmtes Verhalten eines jeden Punktes der Geraden zu einer gegebenen Menge P, entweder ein Grenzpunkt derselben oder kein solcher zu sein, und es ist daher mit der Punktmenge P die Menge ihrer Grenzpunkte *begrifflich* mit gegeben, welche ich mit P' bezeichnen und „die *erste abgeleitete Punktmenge* von P“ nennen will.

Besteht die Punktmenge P' nicht aus einer bloß endlichen Anzahl von Punkten, so hat sie gleichfalls eine abgeleitete Punktmenge P'', ich nenne sie *die zweite abgeleitete von* P. Man findet durch ν solcher Übergänge den Begriff der ν^{ten} abgeleiteten Punktmenge $P^{(\nu)}$ von P.

As examples Cantor mentions that the 1'st derived set of the rational points in [0,1] is the real interval [0,1], and that

$$\{1,1/2,1/3,\ldots,1/n,\ldots\}' = \{0\}$$

A point set P is of kind $\nu \Leftrightarrow P^{(\nu)}$ is finite.

Point Set of Kind ν

A point of kind ν may determine a point set of kind ν

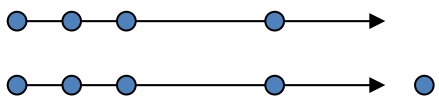
Ein Beispiel einer Punktmenge ν^{ter} Art bietet schon ein einzelner Punkt dar, wenn seine Abszisse als Zahlengröße ν^{ter} Art, welche gewissen, leicht festzustellenden Bedingungen genügt, gegeben ist. Löst man nämlich alsdann diese Zahlengröße in die Glieder $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Art der ihr entsprechenden Reihe auf, diese Glieder wieder in die sie konstituierenden Glieder $(\nu - 2)^{\text{ter}}$ Art usw. so erhält man zuletzt eine unendliche Anzahl rationaler Zahlen; denkt man sich die diesen Zahlen entsprechende Punktmenge, so ist dieselbe von der ν^{ten} Art[1].

[1] Daß dies nicht stets der Fall ist, möchte vielleicht noch ausdrücklich hervorgehoben zu werden verdienen. Im allgemeinen kann die auf jene Weise aus einer Zahlengröße ν^{ter} Art hervorgehende Punktmenge sowohl von niederer wie auch von höherer als der ν^{ten} Art oder selbst gar nicht von bestimmter Art sein.

Uendelige serier af afledede

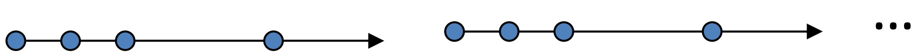
$$P$$
$$P'$$
$$P''$$
$$\vdots$$
$$P^{\infty} = \bigcap_{n} P^{(n)}$$
$$P^{\infty+1} = (P^{\infty})'$$
$$\vdots$$
$$P^{\infty+\infty}$$
$$\vdots$$
$$P^{n_0\infty^{\nu}+n_1\infty^{\nu-1}+\cdots+n_{\nu-1}\infty+n_{\nu}}$$
$$\vdots$$

$$0 = \varnothing$$
$$1 = \{0\}$$
$$2 = \{0,1\}$$
$$3 = \{0,1,2\}$$
$$\vdots$$
$$n+1 = n \cup \{n\}$$
$$\vdots$$
$$\omega = \{0,1,2,\cdots\}$$
$$\omega+1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0,1,2,\cdots,\omega\}$$



$$\vdots$$
$$\omega+\omega = \bigcup_{n<\omega} \omega+n$$

$$\vdots$$
$$\omega^{\omega}$$



$$\vdots$$

Mængder

Unter einer “Menge” verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die “Elemente” von M genannt werden) zu einem Ganzen.

(G. Cantor: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Annalen, Bd. 46, 1895)

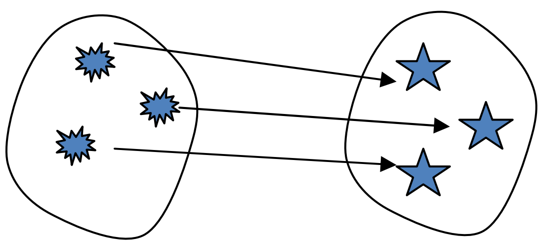
$$M = \{m \mid E(m)\}$$

$$P = \{m \mid m \text{ er et primtal}\} \qquad 5 \in P$$

$$Q = \{r \mid r \text{ er et rationelt tal}\} = \{p/q \mid p \text{ et helt tal}, q \text{ et naturligt tal}\} \qquad \tfrac{2}{3} \in Q$$

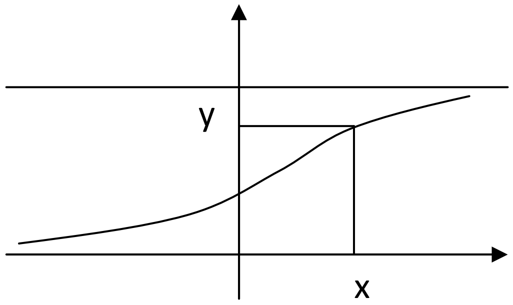
$$C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

Ækvipotens: To mængder M og N er ækvipotente, hvis, og kun hvis, der findes en en-en-korrespondance mellem elementerne i de to mængder

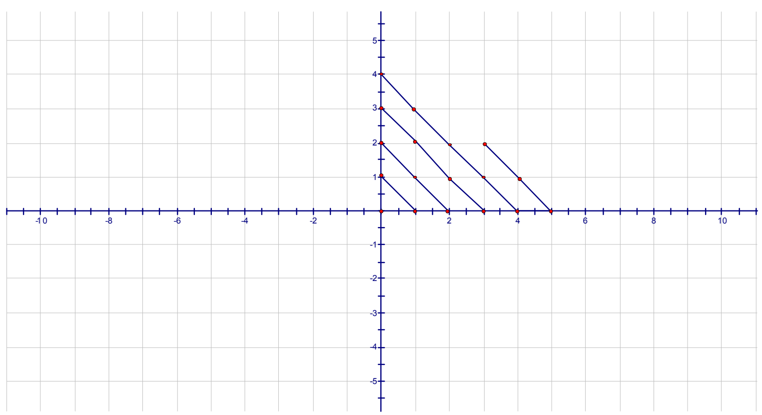


Ækvipotens

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\cdots \\
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12\cdots
\end{array}
$$



Mængden af de naturlige tal **N** er ækvipotent med mængden af de hele tal **Z**, som er ækvipotent med mængden af de rationelle tal **Q**.



Endelige og tællelige mængder

Endelig: En mængde A er endelig, såfremt der findes et naturligt tal n, så A er ækvipotent med N_n={0,1,…,n-1}

Tællelig (nummerabel): En mængde A er tællelig (nummerabel), såfremt A enten er endelig eller ækvipotent med mængden af de naturlige tal N.

Uendelig: En mængde A er uendelig, såfremt A ikke er endelig.

N (de naturlife tal), Z (de hele tal) og Q (de rationelle tal) er uendelige men tællelige mængder.

R (de reelle tal) er en uendelig men ikke tællelig mængde.

Cantors første bevis for de reelle tals overtællelighed

Wenn eine nach irgend einem Gesetze gegebene unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrössen:

$$(4.)\quad \omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\nu, \cdots \cdots$$

vorliegt, so lässt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ eine Zahl η (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe (4.) nicht vorkommt; dies soll nun bewiesen werden.

G. Cantor: Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellem algebraischen Zahlen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1874, p. 260)

Når en uendelig række af forskellige reelle tal, som er givet efter en lovmæssighed, foreligger, så kan der i ethvert givet interval (α … β) bestemmes et tal η (og følgelig uendelig mange sådanne tal), som ikke forekommer i rækken (4.); dette skal nu bevises.

Cantors første bevis

Givet en uendelig følge $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ af reelle tal og et interval $[a,b]$, $a<b$.

1. Find de to første elementer i følgen, ω_{n1}, ω_{m1}, som ligger I det åbne interval $]a,b[$.
Sæt $x_1=\min\{\omega_{n1}, \omega_{m1}\}$ og $y_1= \max\{\omega_{n1}, \omega_{m1}\}$.
2. Find de to første elementer i følgen, ω_{n2}, ω_{m2}, som ligger I det åbne interval $]x_1,y_1[$.
Sæt $x_2=\min\{\omega_{n2}, \omega_{m2}\}$ og $y_2= \max\{\omega_{n2}, \omega_{m2}\}$.
…
k. Find de to første elementer i følgen, ω_{nk}, ω_{mk}, som ligger I det åbne interval $]x_{k-1},y_{k-1}[$.
Sæt $x_k=\min\{\omega_{nk}, \omega_{mk}\}$ og $y_k= \max\{\omega_{nk}, \omega_{mk}\}$.
…

Vi får således en nedadstigende følge af intervaller

$$[a,b]\supset[x_1,y_1]\supset[x_2,y_2]\supset[x_3,y_3]\supset\cdots$$

Første bevis fortsat

Der er nu to muligheder: (1) kæden stopper med intervallet $[x_N, y_N]$ efter endelig mange antal skridt. (2) Der er uendelig mange intervaller,

Ad. 1. Der kan kun være et element fra følgen i intervallet $[x_N, y_N]$ (ellers kunne den fortsættes). Men der er uendelig mange reelle tal $[x_N, y_N]$ – altså også tal, der ikke er med i følgen.

Ad. 2. Sæt $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ og } y_\infty = \lim_{n\to\infty} y_n$

Der er to muligheder:

1.$x_\infty = y_\infty$. Men x_∞ ligger i alle intervallerne $[x_n, y_n]$, hvorimod der for et vilkårligt ω_n findes et interval, som det ikke er med i.

2.$x_\infty < y_\infty$. Der kan ikke ligge tal fra følgen i $[x_\infty, y_\infty]$.

Mængden af uendelige binære følger er ikke tællelig

$$
\begin{array}{lllll}
a_0 = & a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \cdots \\
a^1 = & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots \\
a^2 = & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots \\
a^3 = & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots \\
. & & & & \\
. & & & & \\
. & & & &
\end{array}
$$

$$a_{ij} \in \{0,1\}$$

$b_n=1-a_{nn}$

Følgen (b_n) kan ikke være med i nummereringen (a^n):

Hvis (b_n) var følgen $a^m = (a_{m0}, a_{m1}, a_{m2}, \ldots)$, så ville

$b_m = 1-a_{mm} = a^m{}_m = a_{mm}$

hvilket er en modstrid

Mængden af de reelle tal er ikke tællelige

$C_0 = [0,1]$

C_{n+1} = Fjern den midterste tredjedel I alle intervallerne i C_n, dvs.

erstat alle intervaller [a,b] i C_n med følgende to intervaller

$V[a,b] = [a,a+1/3(b-a)]$

$H[a,b] = [a+2/3(b-a),b]$

Svarende til en binær følge c, definer følgen ($F_{c(0)}$, $F_{c(1)}$, $F_{c(2)}$, …) af lukkede intervaller

$$F_{c(0)} = [0,1]$$

$$F_{c(n+1)} = \begin{cases} VF_{c(n)} & hvis \quad c(n) = 0 \\ HF_{c(n)} & hvis \quad c(n) = 1 \end{cases}$$

Mængden af de reelle tal er ikke tællelige 2

Funktionen f fra mængden af binære følger ind i de reelle tal defineres ved

$$f(c) = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_{c,n}$$

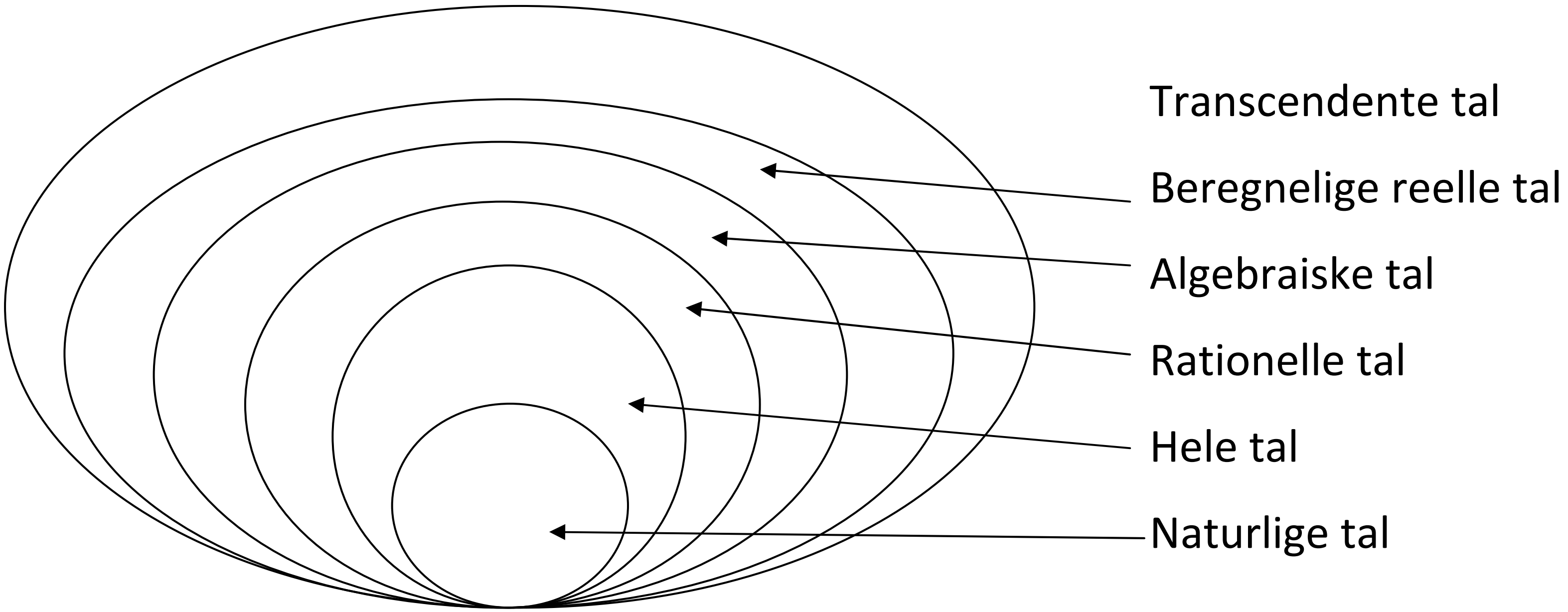
Cantors mængde defineres som

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

Funktionen f er en en-en-korrespondance mellem mængden af binære følger og Cantors mængde.

Da C er en delmængde af R, og C er ækvipotent med mængden af binære følger, som ikke er tællelig, kan R heller ikke være tællelig.

Det reelle talsystem



Transcendente tal = Reelle tal der ikke er algabraiske

Algebraiske tal = Reelle tal, som er rødder i polynomier med rationelle koefficienter.

Mængden af beregnelige tal er tællelig

Mængden af transcendente tal er ikke tællelig

π, γ og e er transcendente tal

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$