Matematik: Videnskaben om det uendelige 9

Hilbert om det uendelige

Klaus Frovin Jørgensen

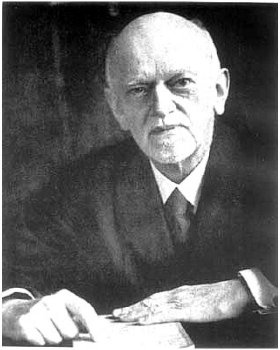
Afdelingen Filosofi og Videnskabsteori, RUC

25. november, 2009

"Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das *Gemüt* der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere *Idee* auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer *Begriff* so der *Aufklärung* bedürftig."

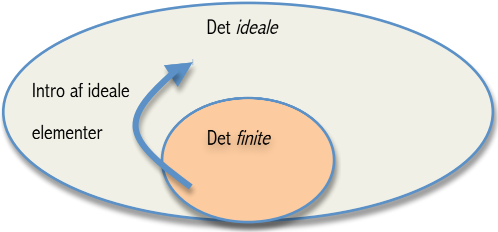
(Hilbert, "Über das Unendliche", 1926, p. 163)

David Hilbert
(23. jan., 1862 – 14. feb., 1943)



Essensen af Hilberts standpunkt

- Matematikken besidder en endelig (*finit*) kerne. Denne accepteres som filosofisk uproblematisk.
- I matematikken introduceres nye *ideale* objekter, som overskrider det endelige. Denne del af matematikkens metode er *progressiv*. Leder til opdagelser og generaliserede begreber.



- Nye objekter må 'kontrolleres' – den *regressive* del af matematikkens metode (her kommer Hilberts program ind i billedet).

Hilberts finite grundlag (1/4)

"In number theory we have the numerals

$$1,\ 11,\ 111,\ 11111,$$

each numeral being perceptually recognizable by the fact that in it 1 is always again following by 1 [if it is followed by anything]. [...]

[W]e would regard $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$ merely as the communication of the fact that the numeral $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ is the same as $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}$. Here too, the contentual correctness of this communication can be proved by contentual inference, and we can go very far with this intuitive, contentual kind of treatment. (Hilbert, 1926, 377)

Hilberts finite grundlag (2/4)

[I]t must be possible to survey these objects completely in all their parts, and the fact that they occur, that they differ from one another, and that they follow each other, or are concatenated, is immediately given intuitively, together with the objects, as something that can neither be reduced to anything else nor requires reduction. This is the basic philosophical position that I consider requisite for mathematics and, in general, for all scientific thinking, understanding, and communication. (Hilbet, 1926, p. 376)

Hilberts finite grundlag (3/4)

An *existential sentence* about numerals, i.e., a sentence of the form "there is a numeral $\mathfrak{n}$ with the property $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$," is to be understood finitistically as a "partial judgment," i.e., as an incomplete communication of a more specific proposition consisting in either a direct exhibition of a numeral with the property $\mathfrak{A}(\mathfrak{n})$, or the exhibition of a process to obtain such a numeral,—where part of the exhibition of such a process is a determinate bound for the sequence of actions to be performed. (Hilbert og Bernays, 1934, p. 32)

Hilberts finite grundlag (4/4)

Den finite kerne karakteriseres ikke entydigt af Hilbert, men den indeholder noget i retningen af:

- Simpel matematik om simple geometriske figurer
- Simpel talteori
- Funtioner over de rationelle tal

Hilbert om det ideale (1/2)

The role that remains to the infinite is, rather, merely that of an idea—if, in accordance with Kant's words, we understand by an idea a concept of reason that transcends all experience and through which the concrete is completed so as to form a totality–an idea [. . .] (Hilbert, 1926, p. 392)

Hilbert om det ideale (2/2)

Ideale elementer har grundlæggende til opgave at:

- Systematisere
- Generalisere
- Skabe sammenhæng
- Fuldstændiggøre

Men de spiller også en central rolle i forbindelse med:

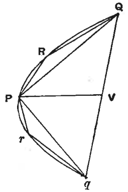
- Opdagelser
- Forklaringer

Eksempler på ideale elementer

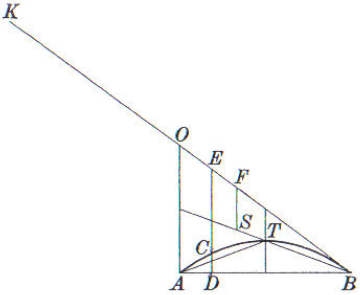
1. Indivisibler
2. Uendelige rækker
3. Fourierrækker
4. Reelle og komplekse tal
5. Klassisk logik (det vil sige “tertium non datur”)
6. Projektiv geometri, som fuldstændiggørelsen af euklidisk geometri
7. Anden-ordens-logik
8. Fraktaler
9. Udvalgsaksiomet
10. Frembringende funktioner

Eksempel 1
Indivisibler (1/2)

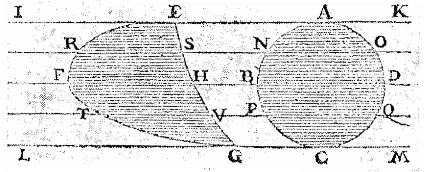
Proposition 24. Every segment bounded by a parabola and a chord Qq is equal to four-thirds of the triangle which has the same base as the segment and equal height.



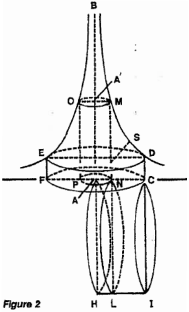
Archimedes skriver til Erastothenes i *Metoden*, at dette (altså, indivisible-metode) handler om *opdagelserne*.



Eksempel 1
Indivisibler (2/2)



Cavalieris princip og Toriciellis trompet



Eksempel 2
Uendelige rækker (1/4)

Simple rækker:

$$2 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \cdots$$

$$\infty = \underbrace{1/2 + 1/3}_{> 1/2} + \underbrace{1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7}_{> 1/2} + \underbrace{1/8 + 1/9 + \cdots + 1/15}_{> 1/2} + \cdots$$

Drilske rækker

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$\begin{aligned} 0 &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \\ 1 &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \\ T &= 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots) = 1 - T \end{aligned}$$

Eksempel 2
Uendelige rækker (2/4)

Euler substituerede -1 for x følgende række og fik $1/2$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \,, \tag{1}$$

Euler's andre eksempler: Substituering af -1 for x i

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$$

medfører

$$\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots \tag{2}$$

Yderligere: substituér 2 for x in (1) giver

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots \,. \tag{3}$$

Euler: -1 er større end det uendelige.

Eksempel 2
Uendelige rækker (3/4)

Indførsel af sum-notation; her for Oresmos række:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Den konvergente række er en såkaldt (uendelig) *geometrisk række*:

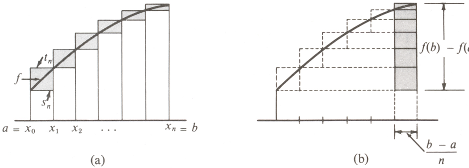
$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots$$

hvor $a = 1$ og $x = 1/2$. En geometrisk række er konvergent hvis $|x| < 1$ med summen

$$\frac{a}{1-x}$$

Eksempel 2
Uendelige rækker (4/4)

Integraler. Når differencen mellem oversum og undersum går mod 0 for n gående mod uendelig er funktionen integrabel.



(a) (b)

$$\int_a^b t_n - \int_a^b s_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

$$= \frac{(b-a)\big(f(b) - f(a)\big)}{n}$$

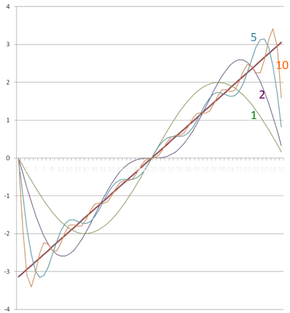
Eksempel 3
Fourierrækker

Fourierrækker. Hvis f har perioden 2π, siger vi at

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

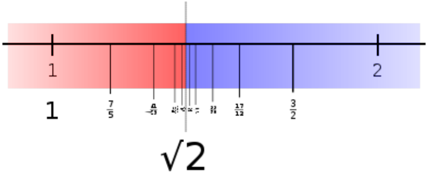
er f's Fourierrække. Mange funktioner kan fremstilles sådan.

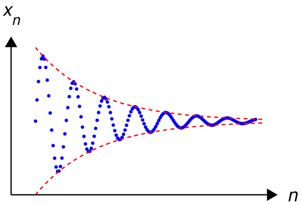
Fourierrækkeudvikling af
$f(x) = x$



Eksempel 4
De reelle tal (1/3)

- Da grundlaget for de reelle tal i slutningen af 1800-tallet kom på plads, fik man styr på tingene. Konvergensbetragtninger sendte indivisiblerne på pension og sikrede brugen af uendelige rækker.
- De reelle tal skabte i den grad orden.





Eksempel 4
De reelle tal (2/3)

Vi har set hvordan talsystemerne kan konstrueres nedefra og op (den genetiske metode). Tal opstår som ækvivalensklasser af mere simple objekter, og vi forstår et tal som bestående af:

1. Et *prototypisk* eksempel,
2. Den tilhørende *karakteristiske funktion*.

Den tilhørende karakteristiske funktion er *afgørbar* i tilfældet med $\mathbf{Z}$ og $\mathbf{Q}$, men dette er *ikke* i tilfældet med $\mathbf{R}$ (se næste slide).

$$\mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{R}$$

▷ De reelle tal er altså selv ideale elementer ◁

Eksempel 4
De reelle tal (3/3)

Uafgørbare spørgsmål vedrørende reelle tal. Lad $R(n)$ stå for: "De $n - 99$ til n decimaler i π er alle 9-taller". Definér nu:

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{hvis} \quad \forall k \leq n \neg R(k) \\ 2^{-k} & \text{hvis} \quad k \leq n \text{ og } R(k) \text{ og } \forall p < k \neg R(p) \end{cases}$$

Er (a_n) element i 0?

Ækvivalensklassen til 0 kan *vi* ikke skarpt afgrænse. Således er de karakteristiske funktioner til ækvivalensklasserne i **R** ikke – som i tilældene **N**, **Z** og **Q** – afgørbare.

Eksempel 4
De komplekse tal

Udfra de reelle tal kan vi konstruere de komplekse. Så $\mathbf{C}$ er mængden af alle komplekse tal hvilke har formen $a + bi$, hvor a og b er reelle tal og $i = \sqrt{-1}$.

Sætning (Algebraens hovedsætning). Ethvert polynomium af grad n

$$p(x) = x^n + a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \cdots + a_{k-1} x + a_k$$

har n rødder. ($\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$).

Eksempel 5
Klassisk logik (1/2)

Ideale elementer introduceres ofte i konteksten af uendelighed.

- "Tertium non datur", $A \vee \neg A$ som ideal-element:
  - ▷ Tilskrivelse af sandhedsværdier til et væld af udsagn, som vi principielt ikke har mulighed for at tjekke.

Eksempel. For alle reelle tal x gælder det, at $x = 0$ eller $x \neq 0$.

- ▷ Uden tertium non datur har vi ikke adgang til de finere detaljer vedrørende eksempelvis de reelle tal.

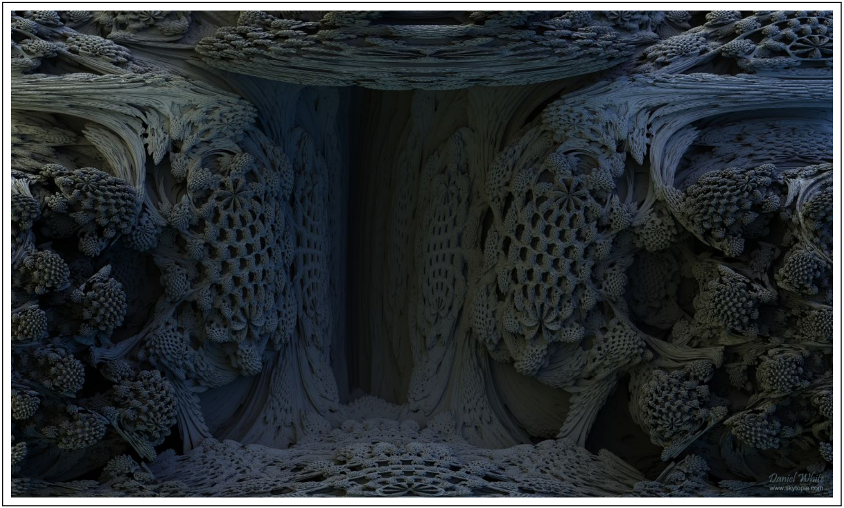
Eksempel 5
Klassisk logik (2/2)

"The infinite is realized nowhere; it does not exist in nature, nor is it admissible as a foundation of our rational thought. And yet we cannot dispense with the unconditional application of the *tertium non datur* and of negation, since otherwise the gap-less and unified construction of our science would be impossible." (Hilbert, 1931, p. 488)

Eksemplerne 6 og 7
Geometri og anden-ordens-logik

- Projektiv geometri er en fuldstændiggørelse af Euklidisk geometri. Punkter og linjer i det uendelige $\Longrightarrow$ dualitetsprincippet, som er meget frugtbart.
- Antagelsen af en anden-ordens-logik er nødvendig for at give det, som Hilbert gerne ville have den aksiomatiske metode til at kunne (f.eks. i forbindelse med studiet af de reelle tal). Kun med i en anden-ordens-logik *karakteriserer* aksiomerne objekterne.
    - ▷ Men aksiomerne for en anden-ordens-logik kan *ikke* skrives op.

Eksempel 8
Fraktaler (1/3)

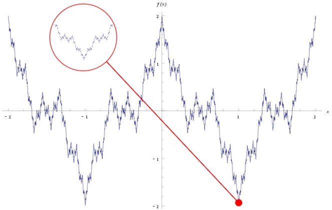


Fraktaler (2/3)

Weierstrass-funktionen. Hvis a er ulige, $b \in [0, 1[$, og hvis $ab > 1 + 3\pi/2$, så er funktionen

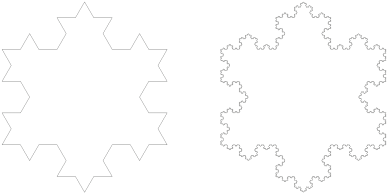
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x)\pi,$$

kontinuert på hele **R** men intetsteds differentiabel.



Eksempel 8
Fraktaler (3/3)

von Koch-kurven. I 1904 introducerede H. von Koch et andet og mere geometrisk motiveret objekt, som ligeledes er kontinuert men intetsteds-differentiabel.



Her ser vi to forskellige approksimationer af kurven. Den egentlige kurve opstår som grænseobjektet og er således et idealt objekt.

Eksempel 9
Udvalgsaksiomet

Ved aksiomatiseringen af mængdelæren blev Zermelo opmærksom på en essentiel antagelse: *Udvalgsaksiomet*. Dette aksiom gør virkelig 'tingene pæne'. Konsekvenser af aksiomet:

- Enhver mængde kan velordnes.
- Ordning efter kardinalitet er en fuldstændig ordning.
- Ethvert vektorrum har en basis.
- Kontinuitet i x_0 er det samme som følge-kontinuitet i x_0.
- Hahn-Banachs sætning: En lineær funktional, defineret på et delrum af et vektorrum, som er begrænset af en seminorm, kan udvides til en lineær funktional, begrænset af samme seminorm, på hele rummet.
- Zorns lemma.

Men der følger også såkaldte paradokser (eks. Banach-Tarski).

Eksempel 10
Et længere eksempel: Frembringende funktioner

Frembringende funktioner benyttes mange steder i matematikken. Blandt andet inden for:

- Talteori
- Sandsynlighedsregning
- Kombinatorik
- Kombinatorisk analyse
- ...

Det essentielle er at indlejre et simpelt problem i et mere komplekst.

Definition af frembringende funktion

Hvis (a_k) er en følge af tal, så er den frembringende funktion for (a_k) den (formelle) potensrække:

$$P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \;\; := \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\Big)_{n\geq 0}$$

hvor z typisk er kompleks.

Konvergens er ikke centralt. I mange tilfælde vil man betragte $P(z)$ som et *formelt* (eller blot et *symbolsk*) objekt.

Vores generelle problem

Lad (a_k) være en rekursiv følge, dvs.:

$$a_k = q_1 a_{k-1} + q_2 a_{k-2} + \cdots + q_d a_{k-d}.$$

Find et lukket udtryk for a_k.

Motivation herfor er:

- Hvad er følgens sammenhæng til resten af matematikken?
- Hvad er følgens asymptotiske opførsel?
- Ønsket om en mere effektiv beregning af det n-te element.
- ...

Vores eksempel: Fibonacci-tallene

Fibonacci [Leonardo af Pisa (1175–1250)] tallene beskriver ideelle populationer:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & 10 & \cdots & 14 & \cdots & 20 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & \cdots & 55 & \cdots & 377 & \cdots & 6765 & \cdots \end{array}$$

Lad f være den elementære talteoretiske Fibonacci-funktion:

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1 \text{ og for } n \geq 2, f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

Problem: Find et lukket udtryk for $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$.

Løsning

Sæt $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Så er J. Binets formel fra 1843:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n).$$

Induktionsbevis. $f(0) = 0$ og $f(1) = 1$. Lad nu $n > 0$. Bemærk, at $\phi^2 = \phi + 1$ og $\hat{\phi}^2 = \hat{\phi} + 1$. Således har vi

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= f(n) + f(n-1) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n) + \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n-1} - \hat{\phi}^{n-1}) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\big((\phi^n + \phi^{n-1}) - (\hat{\phi}^n + \hat{\phi}^{n-1})\big) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}}(\phi^{n+1} - \hat{\phi}^{n+1})
\end{aligned}$$

Hvordan finder man frem til Binets formel?

Induktionsbeviset viser, at udtrykket er korrekt men giver ikke megen information, som kan fortælle om *opdagelsen*. *Hvorfor* er formlen korrekt?

Til sådanne spørgsmål er frembringende funktioner *storslåede*.

Definition på hele $\mathbf{Z}$

Lad $[n = 1]$ være karakteristisk funktion for "n er lig 1", dvs:

$$[n = 1] = \begin{cases} 1, & \text{hvis } n = 1, \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases}$$

Lad $[n > 0]$ være en tilsvarende karakteristisk funktion. Vi kan nu definere f på een formel, sådan at for alle hele tal n:

$$f(n) \;=\; [n > 0]\big(\, f(n-1) + f(n-2) + [n = 1]\,\big).$$

Frembringende funktion for f (1/2)

Lad os danne den frembringende funktion for f:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

Brug nu en-linjes-definitionen af f.

Frembringende funktion for f (2/2)

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Big([n>0](f(n-1)+f(n-2)+[n=1]) \Big) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f(n-1)z^n \;+\; \sum_{n=0}^{\infty} f(n-2)z^n \;+\; \sum_{n=0}^{\infty} [n=1]z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{n+1} \;+ \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{n+2} \;+ z \\
&= z\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n \;+\; z^2\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n \;+\; z \\
&= F(z)(z+z^2)+z.
\end{aligned}
$$

Isolering af $F(z)$ giver:

$$F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$$

Rækkeudvikling af F

Lad ϕ og $\hat{\phi}$ være som før. Da $F(z)$ er en rationel funktion, kan den (for $|z|$ tæt på 0) udvikles som partialbrøk:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - \phi z} - \frac{1}{1 - \hat{\phi} z} \right).$$

De to indre brøker kan udvikles som geometriske rækker:

$$\frac{1}{1 - \phi z} = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi z)^n, \qquad \frac{1}{1 - \hat{\phi} z} = \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{\phi} z)^n.$$

Dermed får vi:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \hat{\phi}^n) z^n.$$

Binets formel; asymptotisk udvikling af Fibonacci

Binets formel blev fundet i en tid hvor man netop var begyndt at bruge analytiske metoder inden for talteori og kombinatorik: Først Euler (1707-1783), siden Dirichlet (1805-1859).

Binets formel fortæller os, at:

$$f(n) \longrightarrow \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{når} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Eksempelvis:

$$f(10) = 55, \quad \text{hvor} \quad \frac{\phi^{10}}{\sqrt{5}} \simeq 55,0036$$

$$f(11) = 89, \quad \text{hvor} \quad \frac{\phi^{11}}{\sqrt{5}} \simeq 88,998.$$

Opdagelser, forklaringer og sikkerhed

- Det lukkede udtryk *opdages* ved hjælp af frembringende funktioner. En lang række spørgsmål vedrørende følgen kan herigennem besvares.
- Udtrykket er frugtbart: Det lukkede udtryk blev brugt på en essentiel måde af Matiyasevich i 1970 til løsningen af Hilberts såkaldte tiende problem.
- Hvis vi søger en forklaring på, *hvorfor* det lukkede udtryk ser ud som det gør, så er det i det komplekse bevis, vi skal søge.

Den generelle sætning

I tilfældet med rekursive følger, giver frembringende funktioner os faktisk en generel metode, som i princippet altid virker:

1. Skriv ned i en enkelt ligning den rekursive følge g_n.
2. Opskriv den frembringende funktion $G(z)$ med udgangspunkt i 1.
3. Udvikl $G(z)$ i en formel potensrække og aflæs koefficienterne til z^n.

Den generelle sætning siger, at et lukket udtryk kan findes til en hvilken som helst rekursiv følge.

Ideale elementers funktioner (igen)

Vi har set hvordan Ideale elementer grundlæggende har til opgave at:

- Systematisere
- Generalisere
- Skabe sammenhæng
- Fuldstændiggøre

Og at de spiller en central rolle i forbindelse med:

- Opdagelser
- Forklaringer

Hilberts matematikfilosofi

Matematikkens metode har to dele:

— En progressiv del: De ideale elementers metode.

— En regressiv del: Den formelle metode; *Hilberts bevisteori*.

Bevisteorien skulle sikre de ideale elementers metode


DAVID
HILBERT
WIR MÜSSEN WISSEN
WIR WERDEN WISSEN