Kontinuitet og Konvergens

Matematik: Videnskaben om det uendelige

5

Newtons Fluent og Fluxion

En variabel størrelse, z, kaldes en **fluent**, og dens ændringstilstand (rate of change) kaldes dens **fluxion**, og betegnes ż. Den fluent, som z er fluxion af, betegnes ź, dvs. ź er integralet af z.

Alle variable størrelser varierer med tiden. ż er således dz/dt, og ź er stamfunktionen til z, dvs.

$$z' = \int z(t)dt$$

Med o betegnes et uendeligt lille tidsinterval. żo bliver således en uendelig lille tilvækst i z, dvs. i moderne notation żo = dz = z'dt.

Newton finder f.eks. Differentialkvotienten til $y=x^n$ på følgende måde:

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$$

$$y + \dot{y}o = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (\dot{x}o)^k$$

$$\dot{y}o = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (\dot{x}o)^k - x^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (\dot{x}o)^k$$

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \dot{x}^k o^{k-1}$$

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$$

Matematikken i 1700-tallet

The conquest of new domains of mathematics proceeds somewhat as do military conquests. Bold dashes into enemy territory capture strongholds. These incursions must than be followed up and supported by broader, more thorough and more cautious operations to secure what has been only tentatively and insecurely grasped.
(Morris Kline: Mathematical Thought. From Ancient to Modern Times. Oxford University Press 1972, p. 400)

- Videreudvikling og anvendelse af infinitesimalregningen inden for fysikken
- Algebraisering af matematikken, herunder opfattelsen af analysen som en udvidelse af algebraen
- Differentialligningsteorien
- Uendelige rækker

Leonhard Euler
(1707-1783)

Introductio in Analysin Infinitorum (1748)

Institutiones Calculi Differentialis (1755)

Institutiones Calculi Integralis (1768-70)

Portrait by Emanuel Handmann 1756(?)

On September 7, 1783, after having discussed the topics of the day, the Montgolfiers, and the discovery of Uranus, according to the oft-cited words of J.A.N.C. de Condorcet, "He ceased to calculate and to live".

Kline: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press 1971, p. 403

Eulers opfattelse af differentialkvotienter

Differentialkvotienten dy/dx er faktisk identisk med 0/0. Men 0/0 kan antage en bestemt endelig størrelse.

Begrundelse: For vilkårligt n gælder $n \cdot 0 = 0$, derfor kan vi hævde $n = 0/0$

Eulers bestemmelse af differentialkvotienten af $y=x^2$:

Giv x tilvæksten ω. Det giver for tilvæksten af y:

$$\mu = (x+\omega)^2 - x^2$$

$$= x^2 + 2\omega x + \omega^2 - x^2$$

$$= 2\omega x + \omega^2$$

altså

$$\mu/\omega = 2x + \omega$$

men ω og μ er i virkeligheden 0, derfor

$$dy/dx = \mu/\omega = 0/0 = 2x$$

Logaritmer til Negative Tal

Leibniz argumenterede mod eksistensen af logaritmer til negative tal, hvorimod John Bernoulli argumenterede for, at log(-1)=0:

d(log x) = dx/x

d(-x)/(-x) = dx/x

d(log –x) = d(-x)/(-x)

d(log –x) = d(log x)

log(-x) = log x, da log(1) = 0 bliver log(-1) = 0

Euler: d(log –x) = d(log x) medfører ikke, at x og –x har samme logaritme, men at deres logaritmer afviger med en konstant, nemlig log(-1).

Eulers formel:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$e^{i\pi} = -1$$

Euler og Logaritmefunktionen

$$x = e^y = \left(1 + \frac{y}{i}\right)^i$$

Moderne $\quad e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

$$x^{1/i} = 1 + \frac{y}{i}$$

$$y = \log x = i\left(x^{1/i} - 1\right)$$

Moderne $\quad \log x = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{1/n} - 1\right)$

Da $x^{1/i} = \sqrt[i]{x}$ er den i'te rod, hvor i er uendelig stor, må der være uendelig mange rødder. Altså må y = log x have uendelig mange værdier.

Euler skriver komplekse tal på formen

$$x = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = e^a e^{i(\theta \pm 2p\pi)} = e^{a + i(\theta \pm 2p\pi)}$$

det giver for logaritmen

$$y = \log x = a + i(\theta \pm 2p\pi)$$

Uendelige rækker

Oresme 1360: Den harmoniske række divergerer

1+1/2+1/3+1/4+1/5+…

1/2+1/2+(1/4+1/4)+(1/8+1/8+1/8+1/8)+(1/16+...

Vieta,1593, angav formlen for summen af en uendelig geometrisk række:

$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$, hvor $a_i=a_1q^{i-1}$

$s_n= a_1+a_2+\ldots+a_n$

I Euklids *Elementer* vises forholdet

$$\frac{s_n-a_n}{s_n-a_1}=\frac{a_1}{a_2}$$

Vieta siger, hvis $a_1/a_2>1$, så bliver $a_n=0$, når n bliver uendelig, og derfor

får vi

$$s_\infty=\frac{a_1^2}{a_1-a_2}$$

Rækker for log og exp

log(2)	log approx	
0,693147181	0,8333	3
	0,6167	6
	0,7456	9
	0,6532	12
	0,6727	24
	0,6828	48
exp(2)	exp approx	
7,389056099	5	3
	7,266667	6
	7,387302	9
	7,389046	12

$$\log(1+x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Drilske rækker

Hvad er summen af rækken $S = 1-1+1-1+1-1+ \dots$?

$S = (1-1)+(1-1)+\dots = 0$
$S = 1-(1-1)-(1-1)-\dots = 1 – S$, altså $S = ½$
$S = 1-(1-1)-(1-1)-\dots = 1$

$(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+x^3+\dots$
for $x=2$
$-1 =1+2+4+8+16+\dots$ (a)

$(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^{3+\dots}$
for $x=-1$
$\infty = 1+2+3+4+5+\dots$ (b)

Højresiden i (a) er større end højresiden i (b), altså $\infty < -1$
Euler: Det uendelige er en slags grænse mellem det positive og det negative og ligner dermed 0.

Taylor-rækker

Taylors formel

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)h^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1}$$

Taylor-række

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!}f''(a)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)h^3 + \cdots$$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$$

MacLaurin-række

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \cdots$$

Konvergensinterval: $|x| < r$

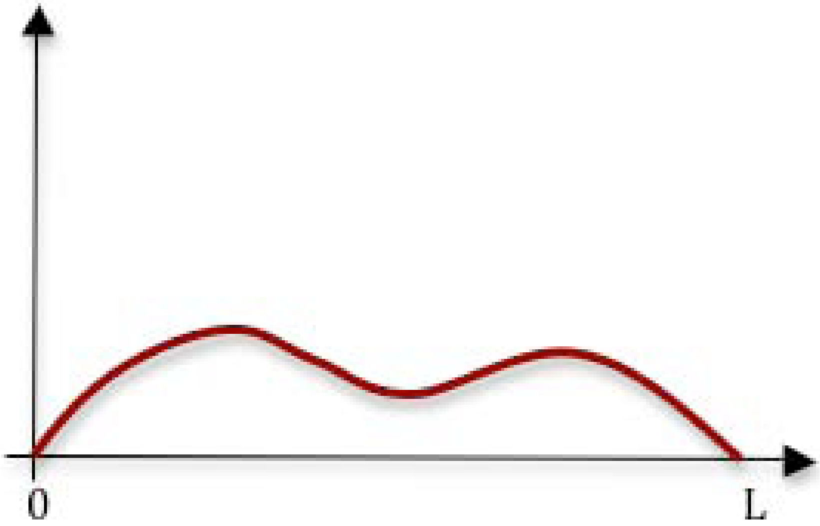
Svingende streng

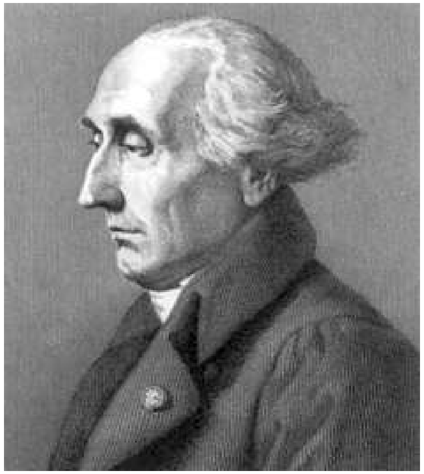
Leonhard Paul Euler

(1707 – 1783)

Jean le Rond d'Alembert

(1717-1783)

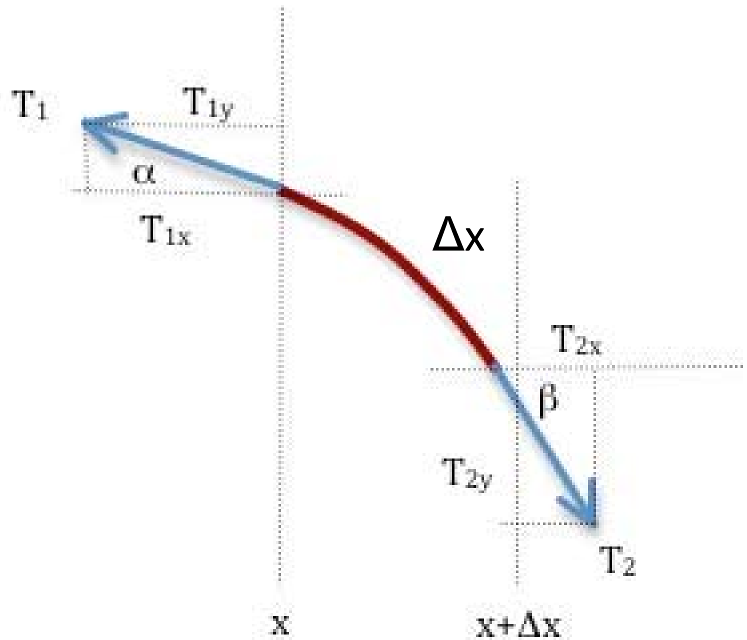




Joseph-Louis Lagrange

1736-1813

Jean d'Alemberts Udledning 1



$$
\begin{aligned}
T_{1x} &= T_1 \cos\alpha \\
T_{2x} &= T_2 \cos\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{1y} &= T_1 \sin\alpha \\
T_{2y} &= T_2 \sin\beta
\end{aligned}
$$

Ingen samlet kraft i x-aksens retning:

$$T_{1x} = T_{2x} = T$$

Newtons 2. lov på udsnittet Δx:

$$
\begin{aligned}
\mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= T_{2y} - T_{1y} \\
&= T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha
\end{aligned}
$$

Jean d'Alemberts Udledning 2

Divider med T på begge sider:

$$\begin{aligned}\frac{\mu\Delta x}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{T_2\sin\beta}{T} - \frac{T_1\sin\alpha}{T}\\ &= \frac{T_2\sin\beta}{T_2\cos\beta} - \frac{T_1\sin\alpha}{T_1\cos\alpha}\\ &= \tan\beta - \tan\alpha\end{aligned}$$

idet $T = T_1\cos\alpha = T_2\cos\beta.$

Vektorerne T_1 og T_2 er tangenter til Kurven y = y(x,t). Derfor

$$\begin{aligned}\tan\beta &= \frac{\partial y}{\partial x}|_{x+\Delta x}\\ \tan\alpha &= \frac{\partial y}{\partial x}|_{x+\Delta}\end{aligned}$$

Det giver for ligningen

$$\frac{\mu\Delta x}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x}|_{x+\Delta}$$

og ved division med Δx

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x}|_{x+\Delta}\right)$$

Dette giver for infinitesimal Δx

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Jean d'Alemberts Udledning 3

Bølgeligningen $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$ hvor $$a = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Variabelskifte
$$\begin{aligned} u &= x + at \\ v &= x - at \end{aligned}$$
fører til ligningen $$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$$

Udregning

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\right) \\
&= \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial v} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial u} &= \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial v} &= \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} \\
&= a\frac{\partial y}{\partial u} - a\frac{\partial y}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial u} &= a\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - a\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial v} &= a\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} - a\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - \frac{1}{a^2}\left(a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2a^2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + a^2\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\right) = 0$$

Løsning af bølgeligningen 1

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0 \qquad \begin{aligned} u &= x + at \\ v &= x - at \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial v} = f_1(v)$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = f_1(v) \Leftrightarrow y = \int_c^v f_1(t)dt + g(u)$$

Den generelle løsning bliver

$$y(x,t) = g(x+at) + f(x-at)$$

D'Alembert kræver, at f og g skal være to gange differentiable I begge variable x og t, hvilket ikke er tilfredsstillende fra et fysisk synspunkt.

Løsning af bølgeligningen 2

Bølgeligningen skal opfylde følgende randbetingelse, da strengen ligger fast i begge ender: y(0,t) = y(L,t) = 0 for alle t.

Endvidere skal der gælde begyndelsesbetingelserne:

y(0,x) = F(x)
y'(0,x) = G(x)

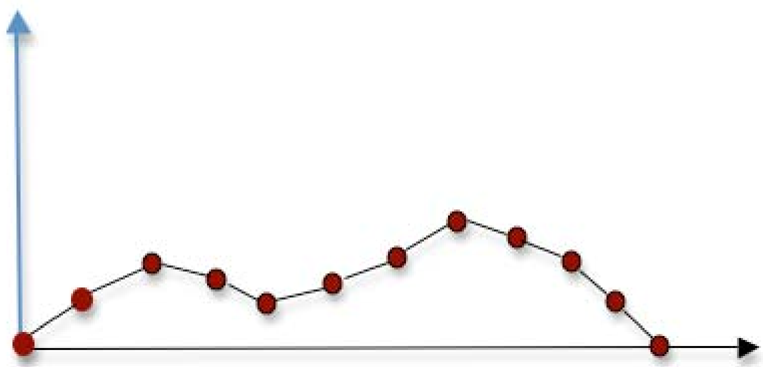
Randbetingelserne giver, at

y(x,t) = f(x+at)+f(x-at), hvor f er en ulige, periodisk funktion med periode   2L.

Samlet fås løsningen

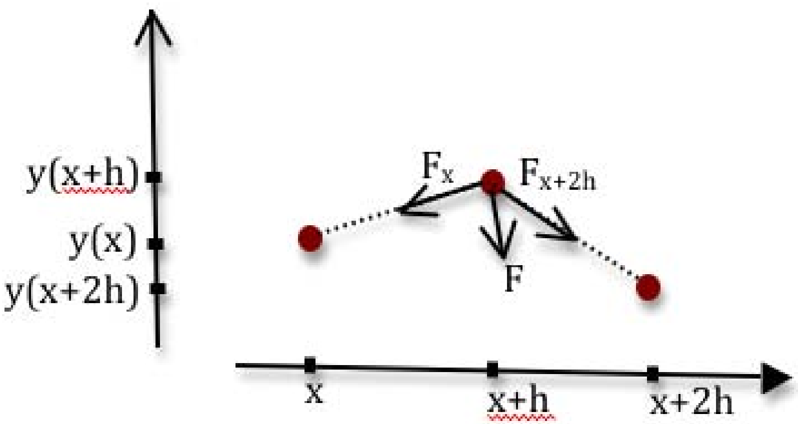
$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left(F(x+at) + F(x-at) + \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at} G(u)\,du \right)$$

Svingende streng efter Lagrange 1



$$F = F_x + F_{x+2h}$$

$$\begin{aligned} F_x &= k(y(x) - y(x+h)) \\ F_{x+2h} &= k(y(x+2h) - y(x+h)) \end{aligned}$$



$$m\frac{\partial^2 y(x+h)}{\partial t^2} = k[y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)]$$

Svingende streng efter Lagrange 2

$$m\frac{\partial^2 y(x+h)}{\partial t^2} = k[y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)]$$

$$m\frac{\partial^2 y(x+h)}{\partial t^2} = kh\left[\frac{y(x+2h) - y(x+h)}{h} - \frac{y(x+h) - y(x)}{h}\right]$$

$$\begin{aligned} y(x+h) - y(x) &= \frac{\partial y}{\partial x}\mid_x h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mid_x h^2 + o(h^2) \\ y(x+2h) - y(x+h) &= \frac{\partial y}{\partial x}\mid_{x+h} h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mid_{x+h} h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

$$m\frac{\partial^2 y(x+h)}{\partial t^2} = kh\left[\frac{\partial y}{\partial x}\mid_{x+h} - \frac{\partial y}{\partial x}\mid_x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mid_{x+h} h - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mid_x h + o(h)\right]$$

$$\frac{m}{h}\frac{\partial^2 y(x+h)}{\partial t^2} = kh\left[\frac{\frac{\partial y}{\partial x}\mid_{x+h} - \frac{\partial y}{\partial x}\mid_x}{h} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mid_{x+h} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\mid_x + \frac{o(h)}{h}\right]$$

Når $h \to 0$ vil $\frac{m}{h} \to \mu$, som er massetætheden i strengen. Tilsvarende antages det, at $kh \to T$, hvor T er spændingen i strengen.

Den sidste ligning giver derfor, når $h \to 0$

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Euler i Stil med Lagrange

Vi skriver ligningen

$$m\frac{\partial^2 y(x+h)}{\partial t^2} = k[y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)]$$

på formen $\ddot{y} = A^2(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) \qquad y_0 = y_{n+1} = 0$

Euler søgte en løsning af formen $y_k = a_k \cos \omega t$

Indsættes dette I ligningen fås $(2A^2 - \omega^2)a_k = A^2(a_{k+1} + a_{k-1})$

Som Euler finder har løsningen, givet $a_0 = 0$ $\quad a_k = \sin k\varphi \quad og \quad \omega = 2A\sin\frac{\varphi}{2}$

Betingelsen $a_{n+1} = 0$ giver $\quad \varphi = \frac{r\pi}{n+1} \qquad r = 1, 2, \ldots, n$

$$\omega_r = 2A\sin\frac{r\pi}{2(n+1)}$$

Den samlede løsning:

$$x_k = \sum_{r=1}^{n} c_r \sin\frac{kr\pi}{n+1}\cos\omega_r t$$

$$c_r = \frac{2}{n+1}\sum_{s=1}^{n} X_s \sin\frac{sr\pi}{n+1}$$

samt ortogonalitetsbetingelse

$$\sum \sin\frac{kr\pi}{n+1}\sin\frac{ks\pi}{n+1} = \frac{n+1}{2}\delta_{rs}$$

Lagranges Generelle løsning

Lagrange finder en løsning i stil med Eulers

$$y_k = \frac{2}{n+1}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} Y_s \sin\frac{rs\pi}{n+1}\sin\frac{kr\pi}{n+1}\cos\omega_r t$$

Med begyndelsesværdier Y_y for y_k og og begyndelseshastighed 0

Lagrange lader nu n gå mod uendelig. I grænsen går kL/(n+1) mod abscissen x og L/(n+1) mod tilvæksten dx.

Han antager yderlig, at $\omega_r = 2A\sin\frac{r\pi}{2(n+1)} \rightarrow \omega_r = \frac{r\pi}{L}c \qquad c = \sqrt{T/\mu}$

og får løsningen

$$y(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^L Y(u)\sin\frac{r\pi u}{L}\sin\frac{r\pi x}{L}\cos\frac{r\pi ct}{L}\,du$$

Fourierrækker

Lad f være en funktion med periode 2π. f's Fourierrække er

$$f(x) : \; c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

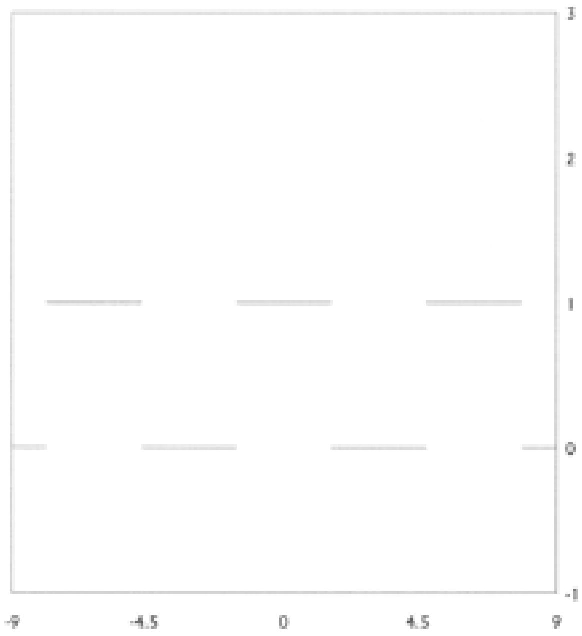
$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$$

Klassen af funktioner, som kan fremstilles på denne form er ret omfattende.

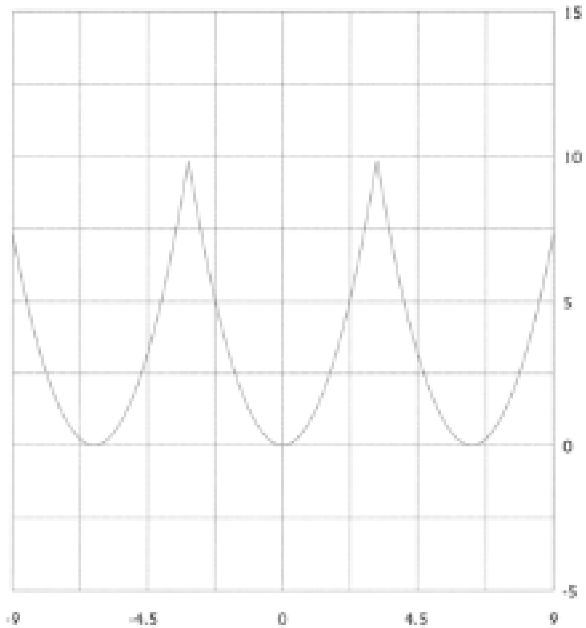
Eksempel 1



$$f(x) = \begin{cases} 1 \quad for \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 \quad for \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$f(x) : \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} \cos nx$$

Eksempel 2



$$f(x) = x^2 \quad for\ x \in [-\pi, \pi]$$

$$f(x) : \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

Reelle tal funktioner og kontinuitet

COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique,
Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi,
rue Serpente, n.° 7.

1821

Cauchys definition af uendelig små størrelser

In speaking about the continuity of functions, I have not been able to avoid presenting the principal properties of infinitely small quantities, properties which serve as a basis for the infinitesimal calculus...

When the successive numerical values of the same variable decrease indefinitely, in such a way as to fall below any given number, this variable becomes what one calls an infinitely small (un infiniment petit) or an infinitely small quantity. A variable of this kind has zero for limit.

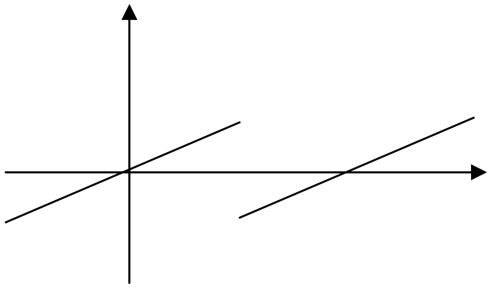
One says that a variable quantity becomes infinitely small, when its numerical value decreases indefinitely in such a way as to converge toward the limit zero"

(Citeret fra Gordon M. Fisher: Cauchy and the Infinitely Small, *Historia Mathematica* 5 (1978))

Cauchys Definition af Kontinuitet

Let $f(x)$ be a function of the variable x, and suppose that for each value of x between two given limits, this function always has a unique and finite value. If, starting with a value of x between these limits, one assigns to the variable x an infinitely small increase α, the function itself will increase by the difference $f(x + \alpha) - f(x)$, which will depend at the same time on the new variable α and on the value of x. This assumed, the function $f(x)$ will be a continuous function of this variable between the two limits assigned to the variable x if, for each value of x between these limits, the numerical value of the difference $f(x + \alpha) - f(x)$ decreases indefinitely with that of α. In other words, the function $f(x)$ will remain continuous with respect to x between the given limits if between these limits an infinitely small increase of the variable always produces an infinitely small increase of the function itself.
[Cauchy 1821, 34-51]

Abels række



$$f(x) = \tfrac{1}{2}(x - 2n\pi) \quad x \in](2n-1)\pi, (2n+1)\pi[$$
$$f(x) == 0 \quad for\ x = (2n+1)\pi$$

$$f(x) \approx \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \cdots$$

Kontinuitet

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er kontinuert i x_0, hvis og kun hvis, der for vilkårligt $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ så

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

for alle x, hvor $|x - x_0| < \delta$.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er ligelig kontinuert i intervallet I, hvis, og kun hvis, der for vilkårligt ε>0 findes et δ>o, så der for vilkårligt $x_o \in I$ gælder

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

for alle x $\in$ I, hvor $|x - x_0| < \delta$.

Konvergens af tal- og funktionsfølger

En talfølge (a_n) konvergerer mod a, hvis og kun hvis, der for vilkårligt

$\varepsilon>0$ findes et naturligt tal N>0, så

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

for alle n>N.

Funktionsfølgen $(f_n(x))$ konvergerer mod f(x), hvis, og kun hvis, der for alle x og alle $\varepsilon>0$

findes et naturligt tal N, så

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

for alle n>N.

Funktionsfølgen $(f_n(x))$ konvergerer ligeligt mod f(x), hvis, og kun hvis, der

for alle $\varepsilon>0$ findes et naturligt tal N, så

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

for alle x og for all n>N.

Konvergens af uendelige rækker

Den undelige funktionsrække

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

konvergerer (ligeligt), såfremt funktionsfølgen ($s_n(x)$), defineret ved

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

konvergerer (ligeligt).

Funktionsrækken

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

konvergerer absolut, såfremt rækken

$$\sum_{i=1}^{\infty} | f_i(x) |$$

konvergerer. Den konvergerer betinget, hvis den konvergerer, men den absolutte række

$$\sum_{i=1}^{\infty} | f_i(x) |$$

ikke konvergerer.

Konvergens af Potensrækker

Potensrækken $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$ er absolut konvergent, hvis $|x - x_0| < r,$ og divergent, hvis $|x - x_0| > r.$ r kaldes rækkens konvergensradius og defineres som

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$