Skolems Paradoks
og
den moderne kritik af mængdelæren

PA og ZFC

$$\forall x(S(x) \neq 0)$$
$$\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(S(y) = x))$$
$$\forall x(x + 0 = x)$$
$$\forall x \forall y(x + S(y) = S(x + y))$$
$$\forall x(x \cdot 0 = 0)$$
$$\forall x \forall y(x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$$
$$\varphi(0,\bar{a}) \wedge \forall x[\varphi(x,\bar{a}) \rightarrow \varphi(S(x),\bar{a})] \rightarrow \forall x \varphi(x,\bar{a})$$

Plus og gange defineret ud fra efterfølgerfunktionen og 0, samt muligheden for at lave induktionsbeviser.

Gödels sætning gælder både for PA og ZFC

ZF1. Extensionalitetsaksiomet
ZF2. Funderingsaksiomet
ZF3. Den tomme mængde
ZF4. Uendelighedsaksiomet
ZF5. Paraksiomet
ZF6. Foreningsmængdeaksiomet
ZF7. Potensmængdeaksiomet
ZF8. Delmængdeaksionet
ZF9. Adskillelsesaksionet
ZF10. Udvalgsaksiomet

Stort set alle matematiske beviser kan formuleres i ZFC.

Ordinaltallene

$$0 = \varnothing$$

$$1 = \{\varnothing\}$$

$$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

$$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

$$\vdots$$

$$n + 1 = n \cup \{n\}$$

$$\vdots$$

$$\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \cdots\}$$

$$\omega + 1 = \omega + \{\omega\}$$

$$\vdots$$

$$\omega + \omega = \bigcup_{n<\omega} (\omega + n)$$

$$\vdots$$

Tallene konstrueres ud fra to regler:

1. Efterfølgertal: $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$

2. Limestal: $\alpha + \beta = \bigcup_{\lambda<\beta} (a + \lambda)$

Ordinal-aritmetik

Addition

$$\alpha + 0 = \alpha$$
$$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$$
$$\alpha + \gamma = \bigcup_{\lambda<\gamma} (\alpha + \lambda)$$

Multiplikation

$$\alpha \cdot 0 = 0$$
$$\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$$
$$\alpha \cdot \gamma = \bigcup_{\lambda<\gamma} (\alpha \cdot \lambda)$$

Potensopløftning

$$\alpha^0 = 1$$
$$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$$
$$\alpha^\gamma = \bigcup_{\lambda<\gamma} \alpha^\lambda$$

Regneregler:

$$(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta)$$
$$\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \delta = \alpha \cdot (\beta \cdot \delta)$$
$$\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$$
$$\alpha \cdot (\beta + \delta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta$$
$$(\alpha + \beta) \cdot \delta = \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \delta$$

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\delta = \alpha^{\beta+\delta}$$
$$(\alpha^\beta)^\delta = \alpha^{\beta\delta}$$

Kardinaltal

Endelige ordinaltal og kardinaltal er identiske.
De uendelige kardinaltal kan indføres således:

$$\aleph_0 = \omega$$
$$\aleph_{n+1} = (\aleph_n)^+$$
$$\aleph_\gamma = \bigcup_{\lambda<\gamma} \aleph_\lambda$$

eller under forudsætning af den generelle kontinuumshypotese:

$$\aleph_0 = \omega$$
$$\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$$
$$\aleph_\gamma = \bigcup_{\lambda<\gamma} \aleph_\lambda$$

Regneregler:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$
$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$
$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$
$$\lambda^\alpha \cdot \lambda^\beta = \lambda^{\alpha+\beta}$$
$$(\alpha \cdot \beta)^\lambda = \alpha^\lambda \cdot \beta^\lambda$$

Reelt afsluttet Legeme

(M,+, · ,0,1) er en kommutativ ring,
Hvis følgende axiomer gælder

$$x + y = y + x$$
$$x + (y + z) = (x + y) + z$$
$$x + 0 = x$$
$$x + (-x) = 0$$
$$x \cdot y = y \cdot x$$
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$
$$x \cdot 1 = x$$
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

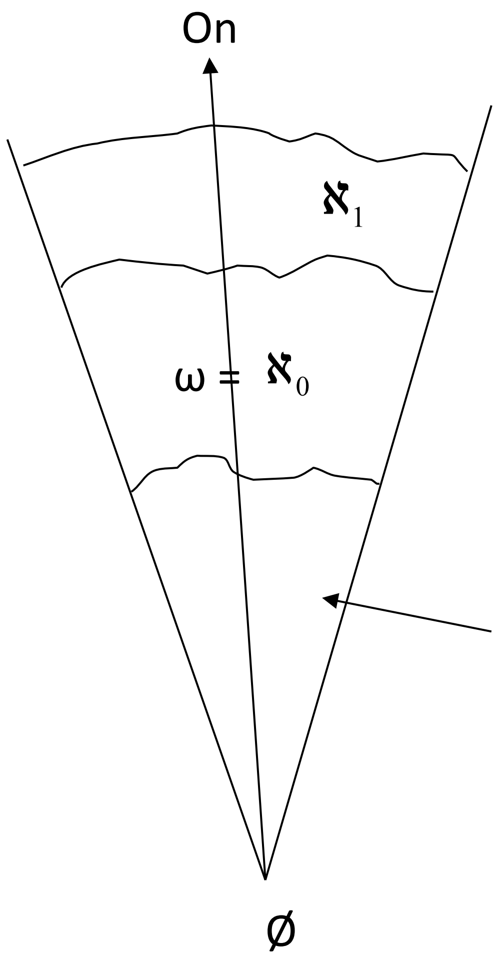
(M,+, · ,0,1) er et kommutativt legene,
hvis (M,+, · ,0,1) er en kommutativ ring,
hvos ethvert element, x, forskelligt fra 0
har et multiplikativt inverst, 1/x

x · 1/x = 0

(M,+, · ,0,1) er et reelt afsuttet legeme,
såfremt (M,+, · ,0,1) er et ordnet
legeme, hvor det gælder at alle
polynomier af ulige grad har en rod I M,
og for ethvert element a I M findes der
et b I M, så a=b^2 eller a=-b^2.

Teorien for et reelt afsluttet legeme er afgørlig.

The Cumulative Hierarchy



$$\varnothing, P(\varnothing), P(P(\varnothing)), \cdots$$

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing\}\}\}, \cdots$$

Peano-aritmetikken, PA

$$\forall x(S(x) \neq 0)$$

$$\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(S(y) = x))$$

$$\forall x(x + 0 = x)$$

$$\forall x \forall y(x + S(y) = S(x + y))$$

$$\forall x(x \cdot 0 = 0)$$

$$\forall x \forall y(x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$$

$$\varphi(0, \overline{a}) \wedge \forall x[\varphi(x, \overline{a}) \rightarrow \varphi(S(x), \overline{a})] \rightarrow \forall x \varphi(x, \overline{a})$$

De sædvanlige naturlige tal er en model for PA. Men ifølge Gödels sætning er PA ufuldstændigt, hvilket gør, at der findes $2^{\aleph_0}$ forskellige tællelige modeller af PA.

Ikke-standard Naturlige Tal

Lad c være en ny konstant, og tilføj aksiomerne
(×) $c \neq 0, c \neq 1, c \neq 2, c \neq 3, \dots, c \neq \underline{n}, \dots$
til PA.

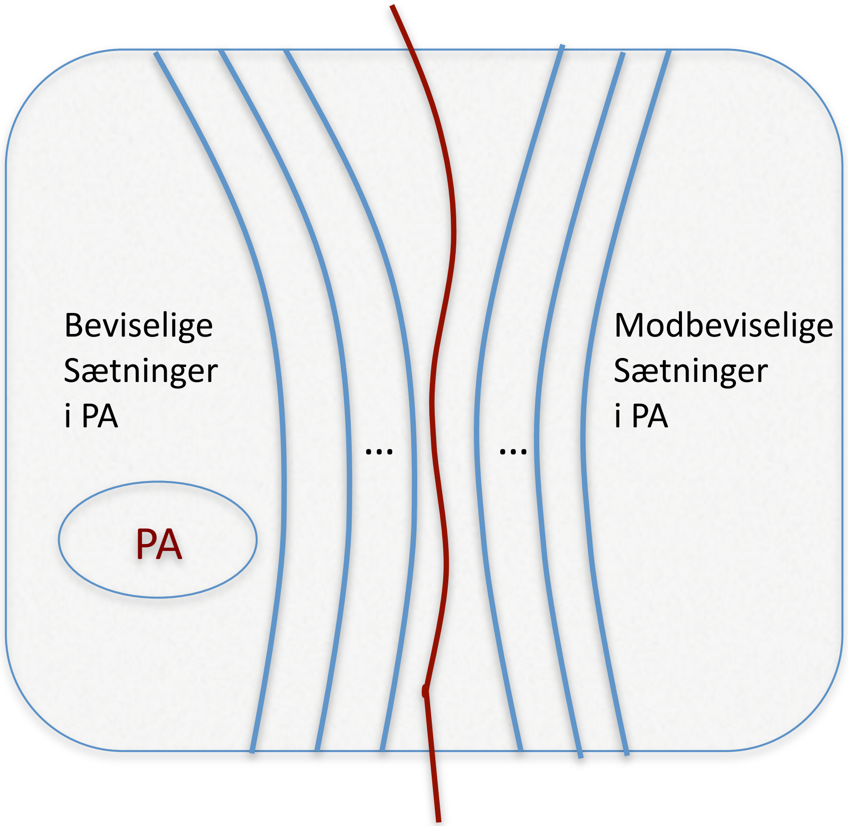
PA+(×) er konsistent, thi:

Antag, at PA+(×) er inkonsistent. Da findes der endelig mange aksiomer fra PA+(×), som fører til en modstrid. Men det vil sige, at der findes $n_1, \dots, n_k$, så PA, $c \neq \underline{n}_1, \dots, c \neq \underline{n}_k$ er inkonsistent, hvilket ikke er muligt. Altså en modstrid. PA+(×) er derfor konsistent.

PA+(×) har derfor ifølge fuldstændighedssætningen en model N^*.

I N^* er c et uendeligt stort ikke-standardtal $\forall n(\underline{n} < c)$

$2^{\aleph_0}$ forskellige modeller af PA



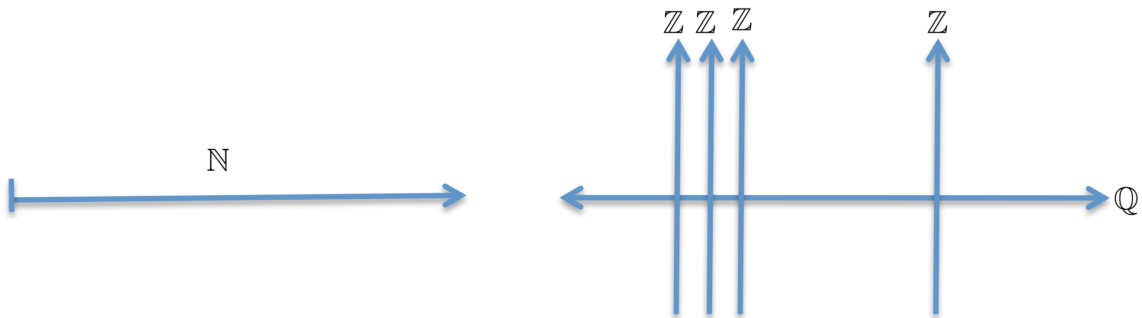
G_1=G-sætning for PA
G_2=G-sætning for PA+G_1
G_3=G-sætning for PA+G_1+G_2
...

$$G^\alpha = \begin{cases} G, & når\ \alpha = 1 \\ \neg G, & når\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$$PA(\gamma) = \bigcup_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \prec \gamma} PA + G_1^{\alpha_1} + \cdots + G_n^{\alpha_n}$$

For enhver uendelig binær følge γ fås en udvidelse af af PA, og hver udvidelse har en model. Der er $2^{\aleph_0}$ forskellige udvidelser, og derfor $2^{\aleph_0}$ forskellige modeller.

Ordningstypen af ikke-standardmodeller af PA



Hvis M er en tællelig ikkestandardmodel af PA, så er M's ordningstype

$$\mathbb{N} + \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q}$$

Tennenbaums sætning: Enhver ikke-standard model af PA er ikke rekursiv, hvilket betyder, at hverken + eller $\cdot$ er rekursive funktioner.

Enhver delmængde af de naturlige tal kan kodes med et ikke-standard tal

Lad T være teorien med følgende aksiomer:

PA

$$c > \underline{n}, \quad n \in N$$

$$\forall x \neg(\underline{p}_k \cdot x = c), \quad k \notin S$$

$$\exists x(\underline{p}_k \cdot x = c), \quad k \in S$$

hvor S er en vilkårlig delmængde af N, (p_k) er følgen af primtal.

Til ethvert endeligt fragment T' af T findes der et tal m, så T' er en delteori af T_m, hvor T_m er T med k begrænset til k<m.

Vælg et primtal q, q>m, og sæt $r = q \cdot \prod_{\substack{k<m \\ k\in S}} p_k$. Da er (N,r) model for T_m.

Ifølge kompakthedssætningen har T en model M. Antag, at c interpreteres som ikke-standard-tallet a i M. Da er a en kode for S:

$$S = \{n \in N \mid M \models \exists x(p_n \cdot x = a)\}$$

Goodstein Følger

Lad m være et naturligt tal. Definer en talfølge g(m) ved

1. Første element er m
2. Andet element : Skriv m fuldt ud i totalssystemet, udskift alle to-taller med tre-taller og træk 1 fra
3. Tredje element: Skriv Andet element fuldt ud i 3-talssystemet, udskift all 3-tal med 4-tal og træk 1 fra

…

n. n-te element: Skriv det n-1'te element fuldt ud i n-talssystemet, udskift alle n'er med (n+1)'er og træk 1 fra.

…

g(3) = (3,3,3,2,1,0,…)

g(4) = (4,26,41,60,83,109,139, …)

G(m)=mindste k så k'te led i g(m) er 0

G(3) = 6, G(4) = $3.2^{402655211} \sim 6{,}895 * 10^{121210694}$

Goodsteins Sætning: For alle naturlige tal er G(n) et endeligt tal, dvs. alle Goodstein-følger er endelige.

Goodsteins sætning er uafgørlig i PA, men kan bevises i ZFC

Problemer med ZF, 1

Anomaly # 1: *Undecidability of the continuum hypothesis.*
… What is more disturbing about Cantorian set theory is that its standard formalizations are known to be incapable of answering questions of seemingly basic importance, most prominently the continuum hypothesis. Now this in itself is obviously not enough to actually falsify the Cantorian view, but it is certainly unsettling. As Paul Cohen has written, "This state of affairs regarding a classical and presumably well-posed problem must certainly appear rather unsatisfactory to the average mathematician" ([6], p. 1). I would add that the problem is not only classical and presumably well-posed, but also apparently quite fundamental.
(Nik Weaver: Mathematical Conceptualism, p. 2-3)

Anomaly # 2: *Poor fit with mathematical practice.*
Classical set theory presents us with a picture of an incredibly vast universe. This universe not only contains the set of natural numbers N and its power set P(N) — the set of all sets of natural numbers — it also contains P(P(N)), P(P(P(N))), etc. This process can be iterated uncountably many times … Yet virtually all important objects in mainstream mathematics are either countable or separable.
(Nik Weaver: Mathematical Conceptualism, p. 3)

Anomaly # 3: *Skolem's paradox*.
… The real import of Skolem's paradox is the fact that M mimics the actual universe of sets so exactly that the latter becomes, for any mathematical purpose, completely superfluous. Moreover, it seems to place the actual universe so far out of our reach as to call our knowledge of its existence into question. "All commentators agree that the existence of such models shows that the 'intended' interpretation, or, as some prefer to speak, the 'intuitive notion of a set', is not 'captured' by the formal system. But if axioms cannot capture the 'intuitive notion of a set', what possibly could?" ([14], p. 465)
(Nik Weaver: Mathematical Conceptualism, p. 3)

Problemer med ZF, 1

Anomaly # 4: *The classical paradoxes*.
… The result is an incoherent system that is based on contradictory intuitions. It is supposed to spring from a conception of an iteratively generated universe which is built up in stages, and indeed most of the axioms fit this view. Yet the power set axiom is incompatible with it because we do not visualize building up power sets in a step-by-step fashion. Instead, ZFC simply postulates that once a set is available its power set immediately becomes available too.

… However, it turns out that in the absence of the power set axiom it is still possible to treat P(N) and R as, in effect, proper classes (see Sections 4 and 5). One might imagine that this approach would be inadequate for the development of normal mathematics, but this is not correct. In fact, when we eliminate the power set axiom the result is a universe that matches actual mathematical practice with remarkable accuracy (see Section 5). As shocking as rejecting power sets may seem at first, once one gets used to the idea it is highly satisfying both philosophically and mathematically.
(Nik Weaver: Mathematical Conceptualism, p. 4-5)

Rudimentære Funktioner

En rudimentær funktion er en funktion opbygget ved sammensætning af følgende funktioner:

$$
\begin{aligned}
F_0(x,y) &= \{x,y\} \\
F_1(x,y) &= x - y \\
F_2(x,y) &= x \times y \\
F_3(x,y) &= \{\langle u,z,v\rangle : z \in x \text{ and } \langle u,v\rangle \in y\} \\
F_4(x,y) &= \{\langle z,v,u\rangle : z \in x \text{ and } \langle u,v\rangle \in y\} \\
F_5(x,y) &= \{\mathrm{ran}(x|_z) : z \in y\} \\
F_6(x) &= \bigcup_{y \in x} y \\
F_7(x) &= \mathrm{dom}(x) \\
F_8(x) &= \{\langle u,v\rangle : u,v \in x \text{ and } u \in v\}
\end{aligned}
$$

J_2

Den rudimentære afslutning af en mængde x er den mindste mængde y, om hvilket der gælder, at (i) x er den delmængde af y, (ii) x er element i y, og (iii) y er lukket under anvendelse af alle rudimentære funktioner.

$J_0 = \emptyset$
J_1 = mængden af alle arveligt endelige mængder:

$$\emptyset \cup P(\emptyset) \cup P(P(\emptyset)) \cup P(P(P(\emptyset))) \cup \cdots$$

J_2 = En tællelig transitiv mængde, som fremkommer ved anvendelse af F_1, ..., F_8 på de arveligt endelige mængder.

According to the conceptualist philosophy all sets have to be built up explicitly from other previously constructed sets. Just what should count as an "explicit" construction may be open to debate, but constructions using the functions F_i of §1.1 are certainly acceptable. Consequently J_2 is available for conceptualist mathematics. In contrast, for example, passing from N to its power set would not be considered explicit because, although one can understand what subsets of N are, one has no clear idea of how to concretely generate all of them.
(Nik Weaver: Analysis in J_2, p. 6)