

Fourierrækker

Lad f være en funktion med periode 2π . f 's Fourierrække er

$$f(x) : c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

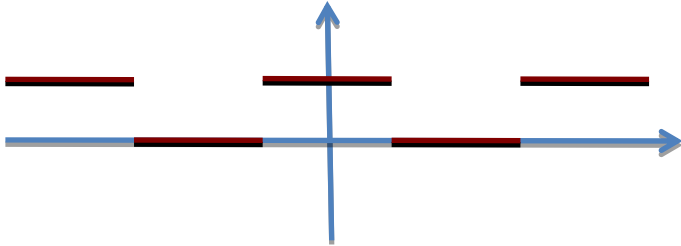
$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

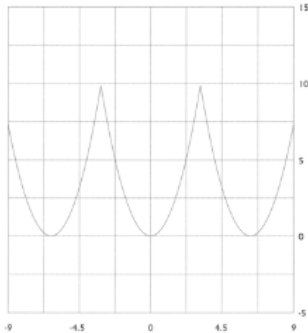
Klassen af funktioner, som kan fremstilles på denne form er ret omfattende.

Eksempler



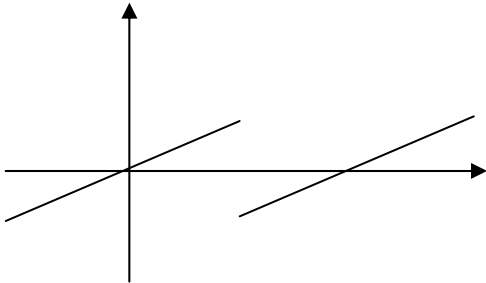
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{for } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2} + \sum \frac{2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} \cos nx$$



$$f(x) = x^2 \quad \text{for } x \in [-\pi, \pi]$$

$$f(x) : \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

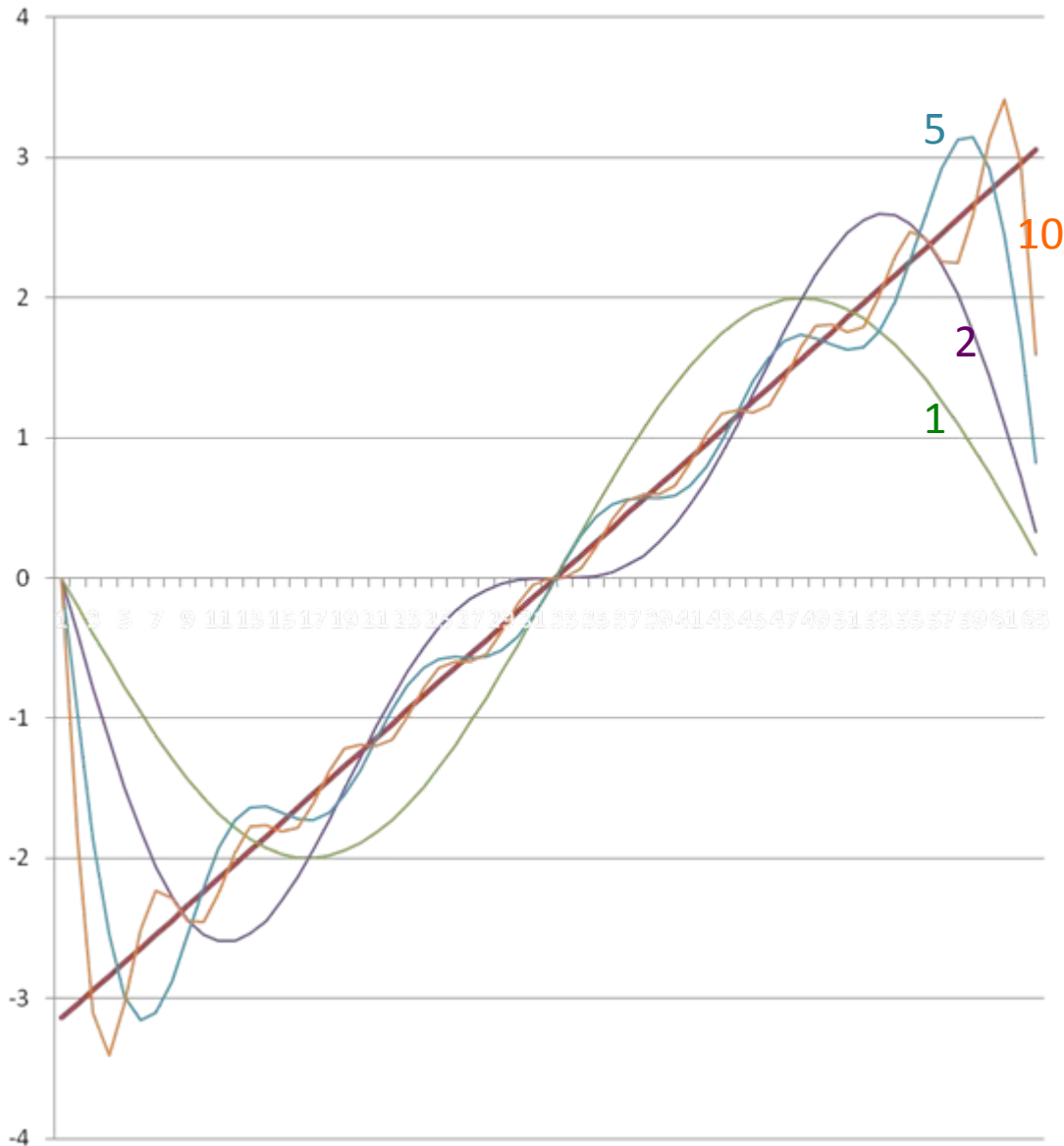


$$f(x) = \frac{1}{2}(x - 2n\pi) \quad x \in [(2n-1)\pi, (2n+1)\pi[$$

$$f(x) = 0 \quad \text{for } x = (2n+1)\pi$$

$$f(x) \approx \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots$$

Fourier-udvikling af $f(x)=x$



$$f(x) = x \quad \text{for} \quad -\pi < x < \pi$$

$$f(x) \approx 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

Cantor's Theory of Real Numbers



Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie
der trigonometrischen Reihen.

[Math. Annalen Bd. 5, S. 123—132 (1872).]

Georg Cantor

(1845 – 1918)

Convergence Fourier Series

Daß zwei trigonometrische Reihen

$$\frac{1}{2}b_0 + \sum (a_n \sin nx + b_n \cos nx) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}b'_0 + \sum (a'_n \sin nx + b'_n \cos nx),$$

welche für jeden Wert von x konvergieren und dieselbe Summe haben, in ihren Koeffizienten übereinstimmen, habe ich im „Journal f. d. r. u. angew. Math. Bd. 72, S. 139“ [hier II 2, S. 80] nachzuweisen versucht; in einer auf diese Arbeit sich beziehenden Notiz habe ich a. a. O. ferner gezeigt, daß dieser Satz auch erhalten bleibt, wenn man für eine endliche Anzahl von Werten des x entweder die Konvergenz oder die Übereinstimmung der Reihensummen aufgibt.

Die *hier* beabsichtigte Ausdehnung besteht darin, daß für eine unendliche Anzahl von Werten des x im Intervalle $(0 \dots 2\pi)$ auf die Konvergenz oder auf die Übereinstimmung der Reihensummen verzichtet wird, ohne daß die Gültigkeit des Satzes aufhört.

Real Numbers

Wenn ich von einer Zahlengröße im weiteren Sinne rede, so geschieht es zunächst in dem Falle, daß eine durch ein Gesetz gegebene unendliche Reihe von rationalen Zahlen

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

vorliegt, welche die Beschaffenheit hat, daß die Differenz $a_{n+m} - a_n$ mit wachsendem n unendlich klein wird, was auch die positive ganze Zahl m sei, oder mit anderen Worten, daß bei beliebig angenommenem (positiven, rationalen) ε eine ganze Zahl n_1 vorhanden ist, so daß $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$, wenn $n \geq n_1$ und wenn m eine beliebige positive ganze Zahl ist.

Diese Beschaffenheit der Reihe (1) drücke ich in den Worten aus: „Die Reihe (1) hat eine bestimmte Grenze b .“

$$\forall \varepsilon \exists n_1 \forall n \geq n_1 \forall m : |a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$$

Die Gesamtheit der Zahlengrößen b möge durch B bezeichnet werden.

Further Constructions

Das Gebiet B ergab sich aus dem Gebiete A ; es erzeugt nun in analoger Weise in Gemeinschaft mit dem Gebiete A ein neues Gebiet C .

Während sich nun die Gebiete B und A so zueinander verhalten, daß zwar jedes a einem b , nicht aber umgekehrt jedes b einem a gleichgesetzt werden kann, stellt es sich hier heraus, daß sowohl jedes b einem c , wie auch umgekehrt jedes c einem b gleichgesetzt werden kann.

The domain C – constructed from B - does not contain any new objects

$$C = B$$

Finite Series of Constructions

Aus dem Gebiete C und den vorhergehenden geht analog ein Gebiet D , aus diesen ein E hervor usw.; durch λ solcher Übergänge (wenn ich den Übergang von A zu B als den ersten ansehe) gelangt man zu einem Gebiete L von Zahlengrößen. Dasselbe verhält sich, wenn man die Kette der Definitionen für Gleich-, Größer- und Kleinersein und für die Elementaroperationen von Gebiet zu Gebiet vollzogen denkt, zu den vorhergehenden, mit Ausschluß von A so, daß eine Zahlengröße l stets gleichgesetzt werden kann einer Zahlengröße $k, i, \dots c, b$ und umgekehrt.

Number, Value and Limit of Kind λ

Auf die Form solcher Gleichsetzungen lassen sich die Resultate der Analysis (abgesehen von wenigen bekannten Fällen) zurückführen, obgleich (was hier nur mit Rücksicht auf jene Ausnahmen berührt sein mag) der Zahlenbegriff, soweit er hier entwickelt ist, den Keim zu einer in sich notwendigen und absolut unendlichen Erweiterung in sich trägt.

Es scheint sachgemäß, wenn eine Zahlengröße im Gebiete L gegeben ist, sich des Ausdruckes zu bedienen: *sie ist als Zahlengröße, Wert oder Grenze λ^{ter} Art gegeben*, woraus ersichtlich ist, daß ich mich der Worte *Zahlengröße, Wert und Grenze* im allgemeinen in gleicher Bedeutung bediene.

Within the system L of numbers of kind λ the algebraic equation

$$F(\ell, \ell', \dots, \ell^{(\rho)}) = 0$$

makes sense. It can be translated into relations between systems of series of rational numbers.

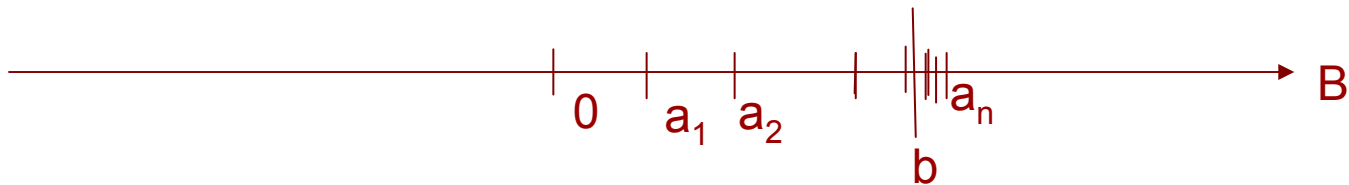
The Real Line

Hat diese Entfernung zur Maßeinheit ein rationales Verhältnis, so wird sie durch eine Zahlengröße des Gebietes A ausgedrückt; im andern Falle ist es, wenn der Punkt etwa durch eine Konstruktion *bekannt* ist, immer möglich, eine Reihe

$$a_1, a_2, \dots a_n, \dots \quad (1)$$

anzugeben, welche die in § 1 ausgedrückte Beschaffenheit und zur fraglichen Entfernung eine solche Beziehung hat, daß die Punkte der Geraden, denen die Entfernungen $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ zukommen, dem zu bestimmenden Punkte mit wachsendem n unendlich nahe rücken.

Dies drücken wir so aus, daß wir sagen: Die Entfernung des zu bestimmenden Punktes von dem Punkte o ist gleich b , wo b die der Reihe (1) entsprechende Zahlengröße ist.



The Real Line

Die Punkte einer geraden Linie werden dadurch begrifflich bestimmt, daß man unter Zugrundelegung einer Maßeinheit ihre Abszissen d. h. ihre Entfernungen von einem festen Punkte o der geraden Linie mit dem $+$ oder $-$ Zeichen angibt, je nachdem der betreffende Punkt in dem (vorher fixierten) positiven oder negativen Teile der Linie von o aus liegt.



The Axiom of Completeness

Daß nun ebenso auch die Zahlengrößen der Gebiete C, D, \dots befähigt sind, bekannte Entfernungen zu bestimmen, ergibt sich ohne Schwierigkeit. Um aber den in diesem § dargelegten Zusammenhang der Gebiete der in § 1 definierten Zahlengrößen mit der Geometrie der geraden Linie vollständig zu machen, ist nur noch ein *Axiom* hinzuzufügen, welches einfach darin besteht, daß auch umgekehrt zu jeder Zahlengröße ein bestimmter Punkt der Geraden gehört, dessen Koordinate gleich ist jener Zahlengröße, und zwar in dem Sinne gleich, wie solches in diesem § erklärt wird¹.

Ich nenne diesen Satz ein *Axiom*, weil es in seiner Natur liegt, nicht allgemein beweisbar zu sein.

A point on the real line is then called a number of kind λ when it is determined by a series of kind λ .

Point Sets

Eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Zahlengrößen nenne ich der Kürze halber eine Wertmenge und dem entsprechend eine gegebene endliche oder unendliche Anzahl von Punkten einer Geraden eine Punktmenge. Was im folgenden von Punktmengen ausgesprochen wird, läßt sich dem gesagten gemäß unmittelbar auf Wertmengen übertragen.

Limit Points

Wenn in einem endlichen Intervalle eine Punktmenge gegeben ist, so ist mit ihr im allgemeinen eine zweite Punktmenge, mit dieser im allgemeinen eine dritte usw. gegeben, welche für die Auffassung der Natur der ersten Punktmenge wesentlich sind.

Um diese abgeleiteten Punktmenge zu definieren, haben wir den Begriff Grenzpunkt [„Häufungspunkt“] einer Punktmenge vorzuschicken.

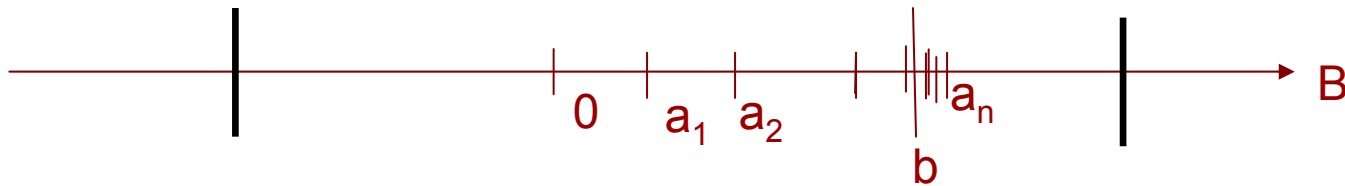
a is a limit point of $P \leftrightarrow$ There are infinitely many points from P in every neighbourhood of a

Unter einem „Grenzpunkt einer Punktmenge P “ verstehe ich einen Punkt der Geraden von solcher Lage, daß in jeder Umgebung desselben unendlich viele Punkte aus P sich befinden, wobei es vorkommen kann, daß er außerdem selbst zu der Menge gehört. Unter „Umgebung eines Punktes“ sei aber hier ein jedes Intervall verstanden, welches den Punkt *in seinem Innern* hat:

Bolzano-Weierstrass's Theorem

Cantor states Bolzano-Weierstrass's theorem which says that every bounded infinite set of points on the real line has a limit point.

Darnach ist es leicht zu beweisen, daß eine aus einer unendlichen Anzahl von Punkten bestehende [„beschränkte“] Punktmenge stets zum wenigsten *einen* Grenzpunkt hat.



Point sets of ν 'th kind

Es ist nun ein bestimmtes Verhalten eines jeden Punktes der Geraden zu einer gegebenen Menge P , entweder ein Grenzpunkt derselben oder kein solcher zu sein, und es ist daher mit der Punktmenge P die Menge ihrer Grenzpunkte *begrifflich* mit gegeben, welche ich mit P' bezeichnen und „die erste abgeleitete Punktmenge von P “ nennen will.

Besteht die Punktmenge P' nicht aus einer bloß endlichen Anzahl von Punkten, so hat sie gleichfalls eine abgeleitete Punktmenge P'' , ich nenne sie die zweite abgeleitete von P . Man findet durch ν solcher Übergänge den Begriff der ν^{ten} abgeleiteten Punktmenge $P^{(\nu)}$ von P .

As examples Cantor mentions that the 1'st derived set of the rational points in $[0,1]$ is the real interval $[0,1]$, and that

$$\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}' = \{0\}$$

A point set P is of kind $\nu \Leftrightarrow P^{(\nu)}$ is finite.

Point Set of Kind ν

A point of kind ν may determine a point set of kind ν

Ein Beispiel einer Punktmenge ν^{ter} Art bietet schon ein einzelner Punkt dar, wenn seine Abszisse als Zahlengröße ν^{ter} Art, welche gewissen, leicht festzustellenden Bedingungen genügt, gegeben ist. Löst man nämlich alsdann diese Zahlengröße in die Glieder $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Art der ihr entsprechenden Reihe auf, diese Glieder wieder in die sie konstituierenden Glieder $(\nu - 2)^{\text{ter}}$ Art usw. so erhält man zuletzt eine unendliche Anzahl rationaler Zahlen; denkt man sich die diesen Zahlen entsprechende Punktmenge, so ist dieselbe von der ν^{ten} Art¹.

¹ Daß dies nicht stets der Fall ist, möchte vielleicht noch ausdrücklich hervorgehoben zu werden verdienen. Im allgemeinen kann die auf jene Weise aus einer Zahlengröße ν^{ter} Art hervorgehende Punktmenge sowohl von niederer wie auch von höherer als der ν^{ten} Art oder selbst gar nicht von bestimmter Art sein.

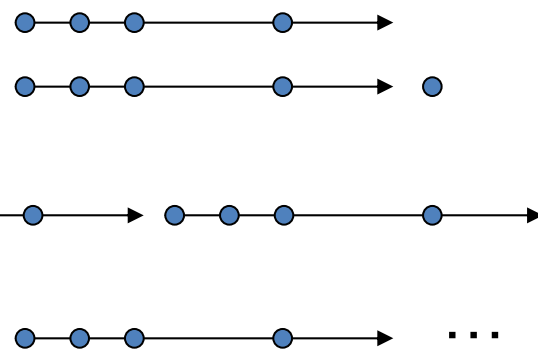
Uendelige serier af afledede

$$\begin{aligned}
 &P \\
 &P' \\
 &P'' \\
 &\vdots \\
 &P^\infty = \bigcap_n P^{(n)} \\
 &P^{\infty+1} = (P^\infty)' \\
 &\vdots \\
 &P^{\infty+\infty} \\
 &\vdots \\
 &P^{n_0\omega^{\nu} + n_1\omega^{\nu-1} + \dots + n_{\nu-1}\omega + n_\nu} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \emptyset \\
 1 &= \{0\} \\
 2 &= \{0,1\} \\
 3 &= \{0,1,2\} \\
 &\vdots \\
 n+1 &= n \cup \{n\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\vdots \\
 \omega &= \{0,1,2,\dots\} \\
 \omega+1 &= \omega \cup \{\omega\} = \{0,1,2,\dots,\omega\} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega + \omega &= \bigcup_{n < \omega} \omega + n \\
 &\vdots \\
 \omega^\omega &
 \end{aligned}$$



Mængder

Under en "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen.

(G. Cantor: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Annalen, Bd. 46, 1895)

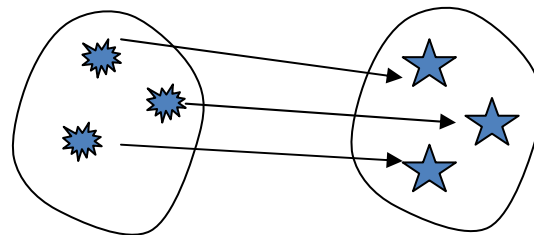
$$M = \{m \mid E(m)\}$$

$$P = \{m \mid m \text{ er et primtal}\} \quad 5 \in P$$

$$Q = \{r \mid r \text{ er et rationelt tal}\} = \{p/q \mid p \text{ et helt tal, } q \text{ et naturligt tal}\} \quad \frac{2}{3} \in Q$$

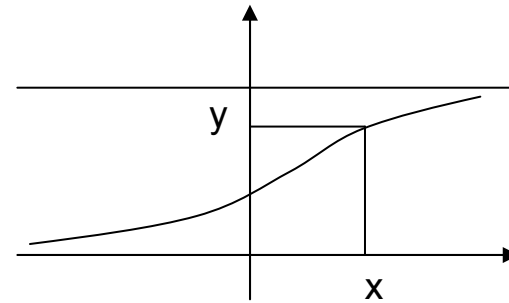
$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

Ækvipotens: To mængder M og N er ækvipotente, hvis, og kun hvis, der findes en en-en-korrespondance mellem elementerne i de to mængder

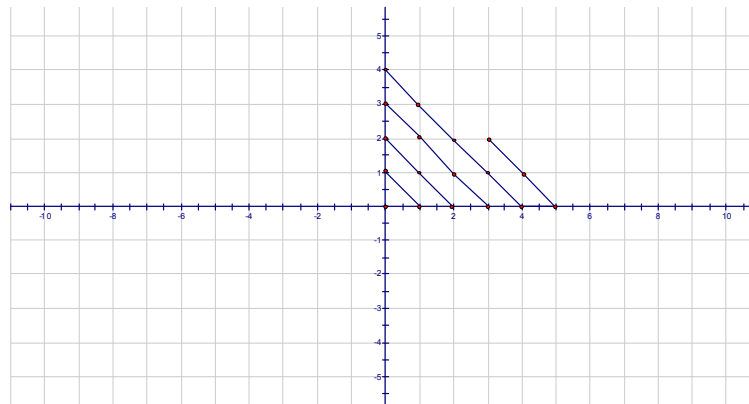


Ækvipotens

1	2	3	4	5	6	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
2	4	6	8	10	12	...



Mængden af de naturlige tal \mathbf{N} er ækvipotent med mængden af de hele tal \mathbf{Z} , som er ækvipotent med mængden af de rationelle tal \mathbf{Q} .



Endelige og tællelige mængder

Endelig: En mængde A er endelig, såfremt der findes et naturligt tal n , så A er ækvipotent med $N_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$

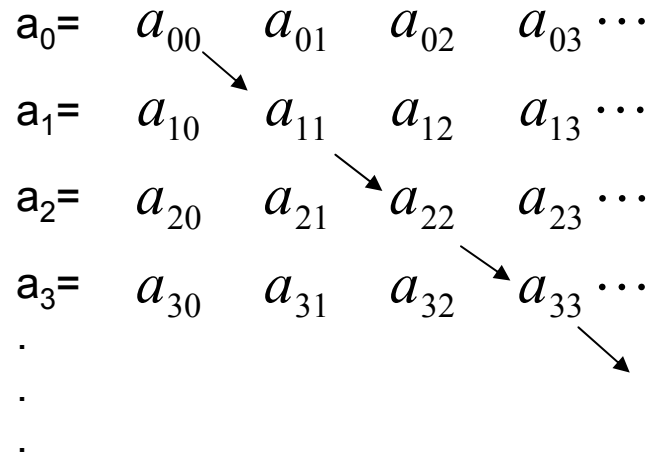
Tællelig: En mængde A er tællelig, såfremt A enten er endelig eller ækvipotent med mængden af de naturlige tal N .

Uendelig: En mængde A er uendelig, såfremt A ikke er endelig.

N (de naturlige tal), Z (de hele tal) og Q (de rationelle tal) er uendelige men tællelige mængder.

R (de reelle tal) er en uendelig men ikke tællelig mængde.

Mængden af uendelige binære følger er ikke tællelig

$$\begin{array}{l} a_0 = a_{00} \quad a_{01} \quad a_{02} \quad a_{03} \cdots \\ a_1 = a_{10} \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \cdots \\ a_2 = a_{20} \quad a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \cdots \\ a_3 = a_{30} \quad a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \cdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}$$


$$a_{ij} \in \{0,1\}$$

$$b_n = 1 - a_{nn}$$

Følgen (b_n) kan ikke være med i nummereringen (a_n) ,

Idet

$$b_n = 1 - a_{nn} \neq a_{nn}$$

Mængden af de reelle tal er ikke tællelige



$$C_0 = [0,1]$$

C_{n+1} = Fjern den midterste tredjedel i alle intervallerne i C_n , dvs.

erstat alle intervaller $[a,b]$ i C_n med følgende to intervaller

$$V[a,b] = [a, a + 1/3(b-a)]$$

$$H[a,b] = [a + 2/3(b-a), b]$$

Svarende til en binær følge c , definer følgen $(F_{c_0}, F_{c_1}, F_{c_2}, \dots)$ af lukkede intervaller

$$F_{c,0} = [0,1]$$

$$F_{c,n+1} = \begin{cases} VF_{c_n} & \text{hvis } c(n) = 0 \\ HF_{c_n} & \text{hvis } c(n) = 1 \end{cases}$$

Mængden af de reelle tal er ikke tællelige 2

Funktionen f fra mængden af binære følger ind i de reelle tal defineres ved

$$f(c) = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_{c,n}$$

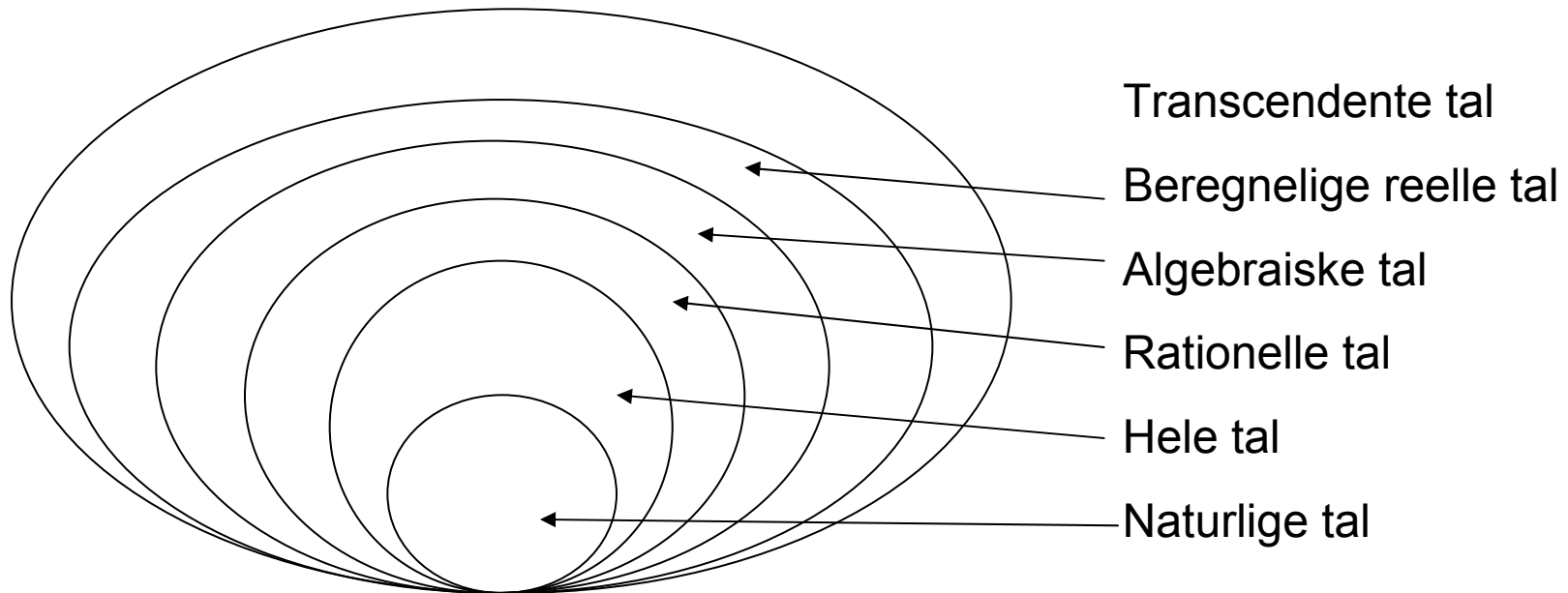
Cantors mængde defineres som

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

Funktionen f er en en-en-korrespondance mellem mængden af binære følger og Cantors mængde.

Da C er en delmængde af \mathbb{R} og C er ækvipotent med mængden af binære følger, som ikke er tællelig, kan \mathbb{R} heller ikke være tællelig.

Det reelle talsystem



Transcendente tal = Reelle tal der ikke er algebraiske

Mængden af beregnelige tal er tællelig

Mængden af transcendentale tal er ikke tællelig

π , γ og e er transcendentale tal

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$$