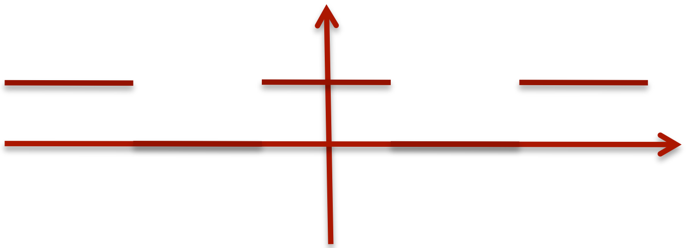
Udvalgsaksiomet

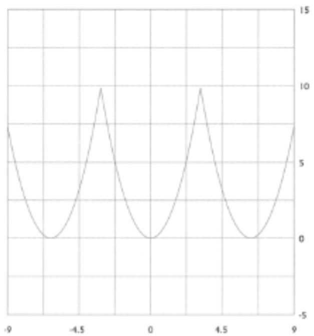
Onsdag den 18. november 2009

Eksempler



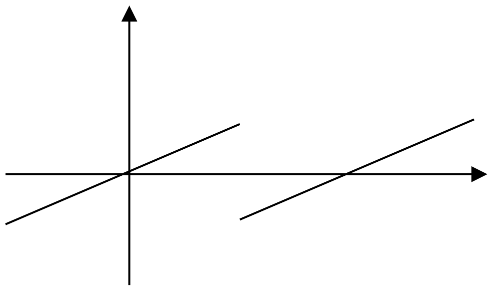
$$f(x)=\begin{cases} 1 \quad for \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ 0 \quad for \quad -\pi<x<-\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$$

$$f(x)\approx \tfrac{1}{2}+\sum \frac{2\sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}\cos nx$$



$$f(x)=x^2 \quad for\ x\in[-\pi,\pi]$$

$$f(x): \frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

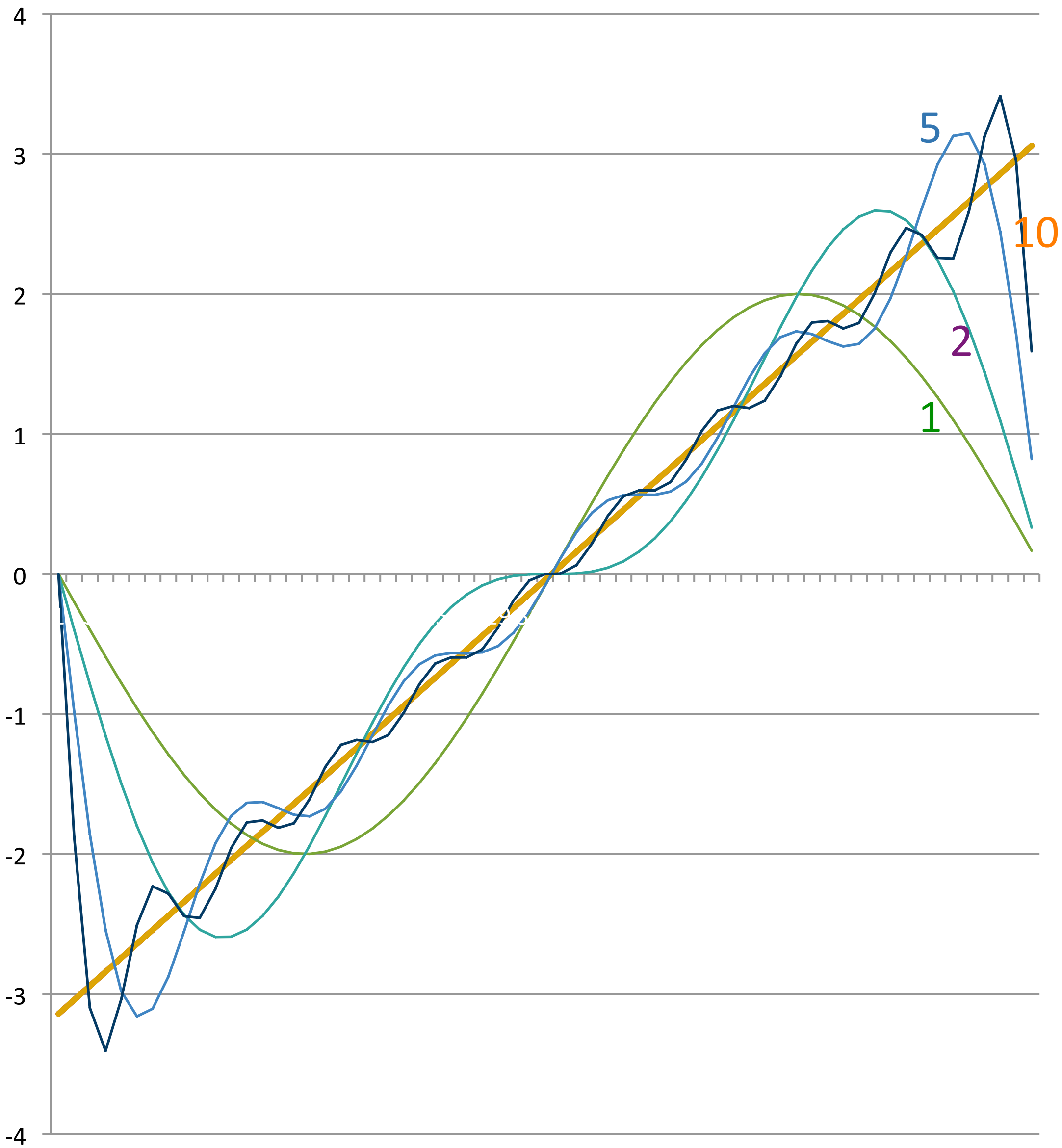


$$f(x)=\tfrac{1}{2}(x-2n\pi) \quad x\in](2n-1)\pi,(2n+1)\pi[$$

$$f(x)=0 \quad f\,or\ x=(2n+1)\pi$$

$$f(x)\approx \sin x-\tfrac{1}{2}\sin 2x+\tfrac{1}{3}\sin 3x-\cdots$$

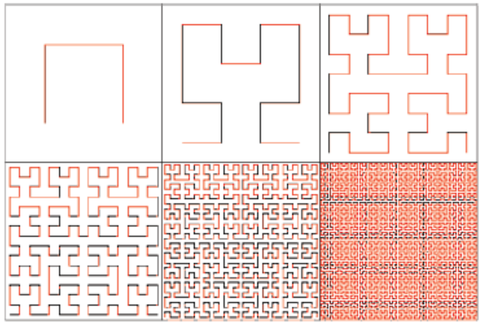
Fourier-udvikling af f(x)=x



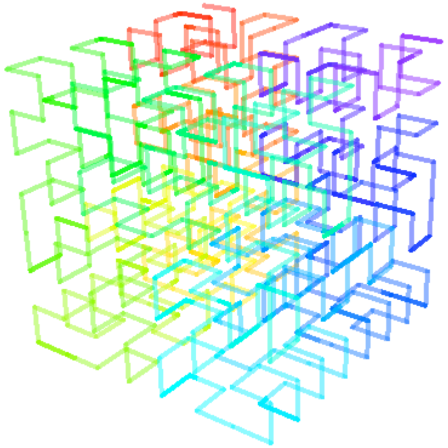
$$f(x) = x \quad for \quad -\pi < x < \pi$$

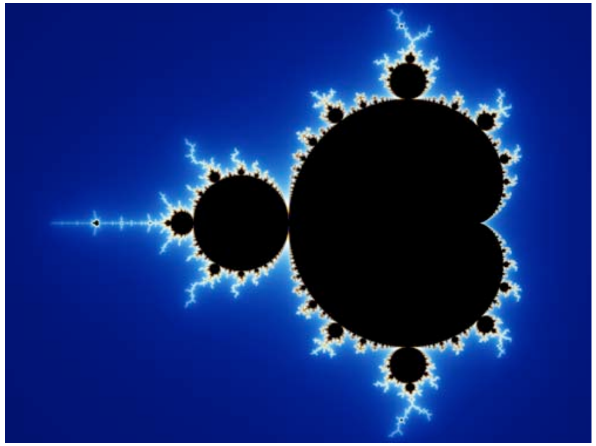
$$f(x) \approx 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

Fraktaler

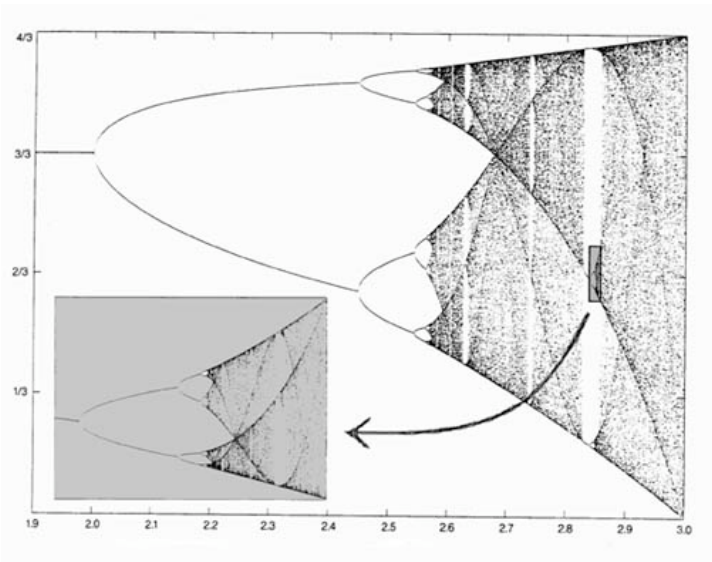


Hilbert

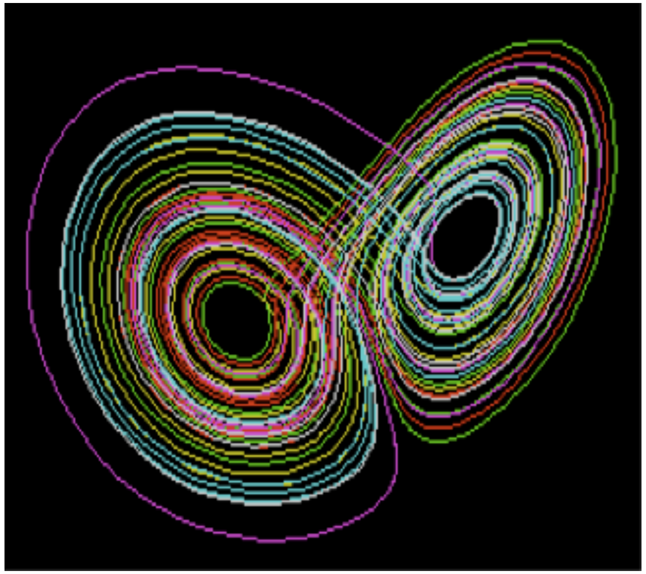




Mandelbrot



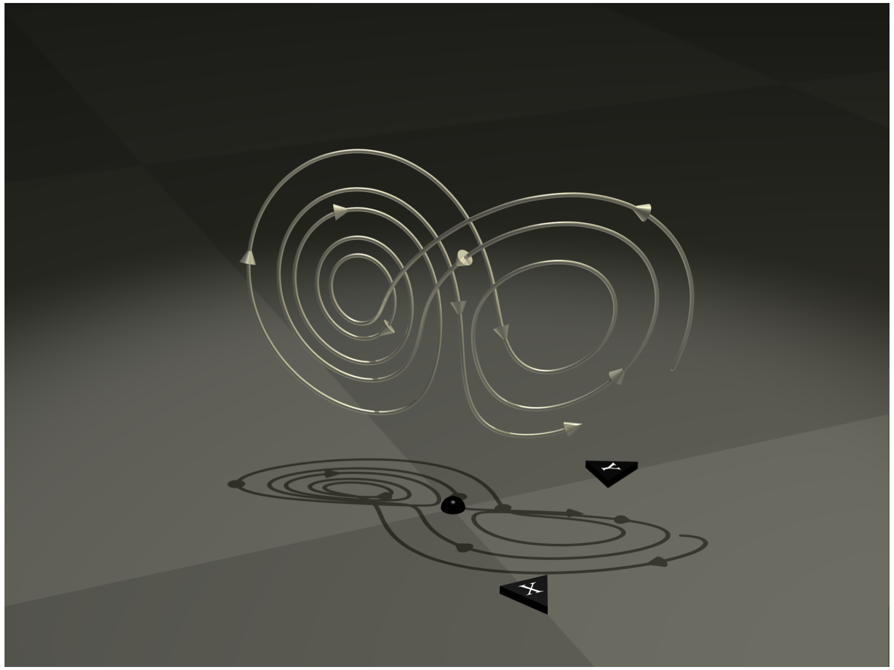
Feigenbaum



Lorenz

Lorenz-Ligningerne

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

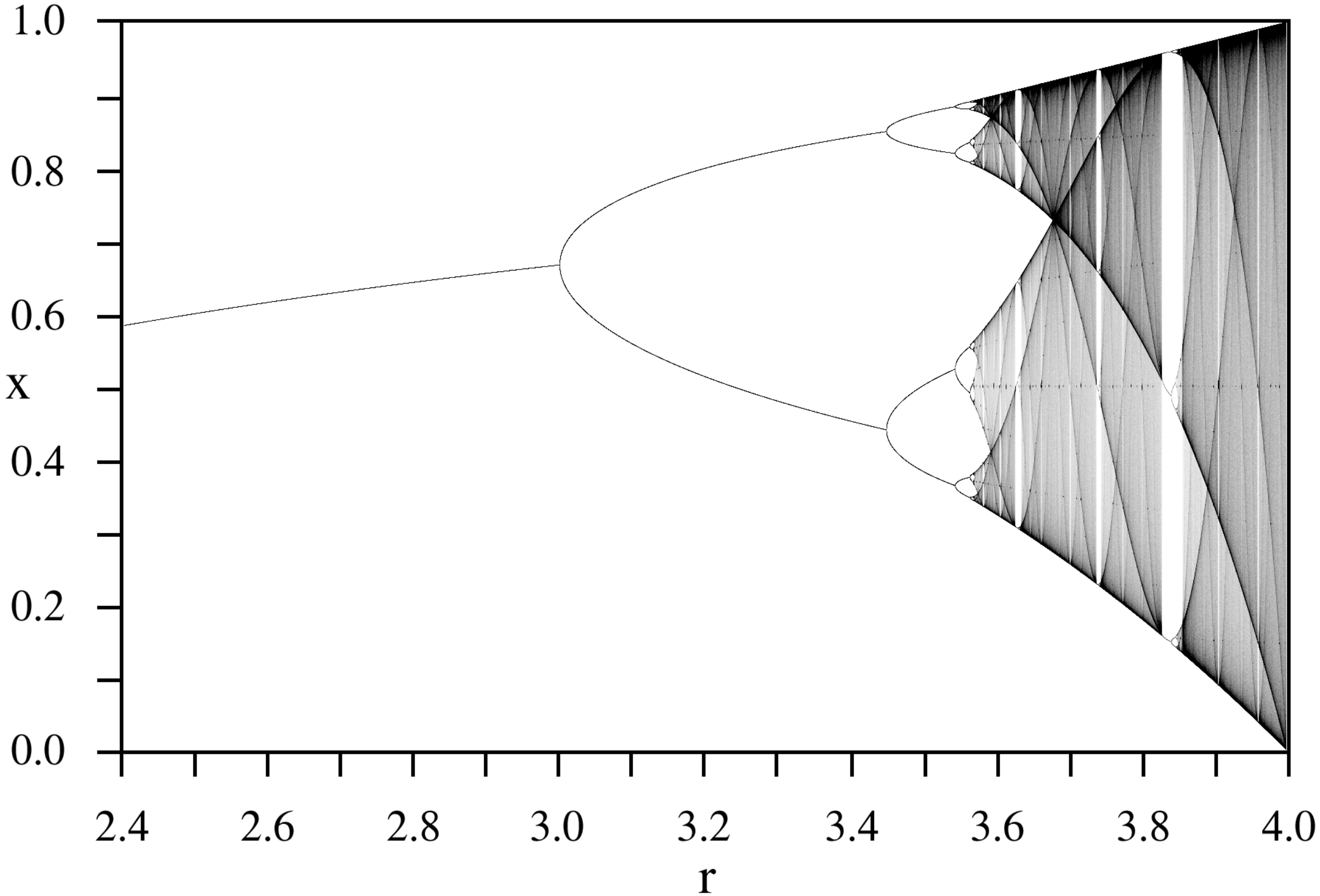


σ = 10

β = 8/3

ρ =28

Logistisk vækst



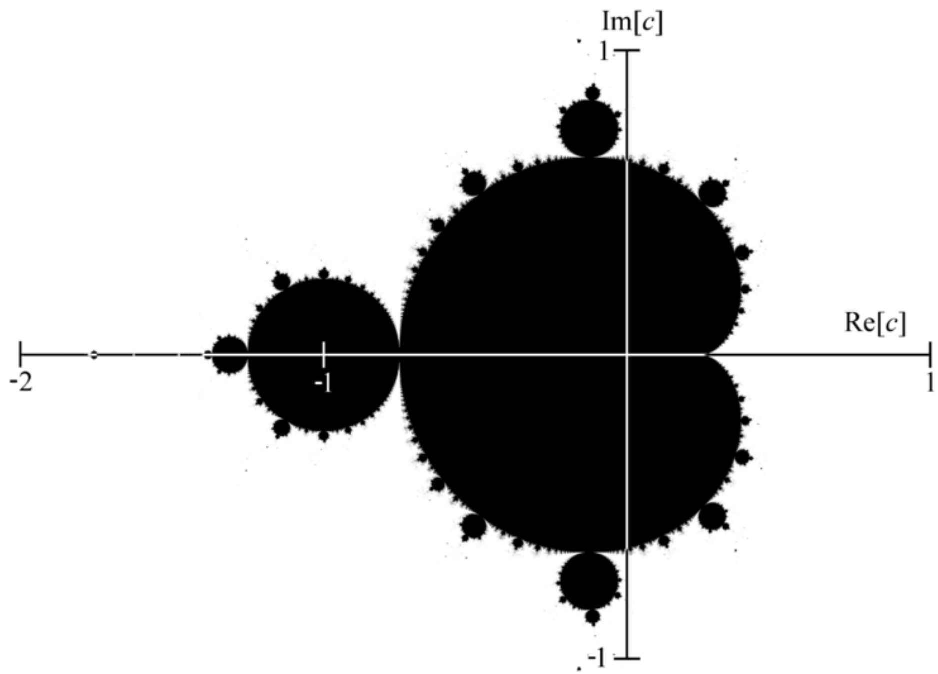
x -> rx(1-x)

Mandelbrots fraktal

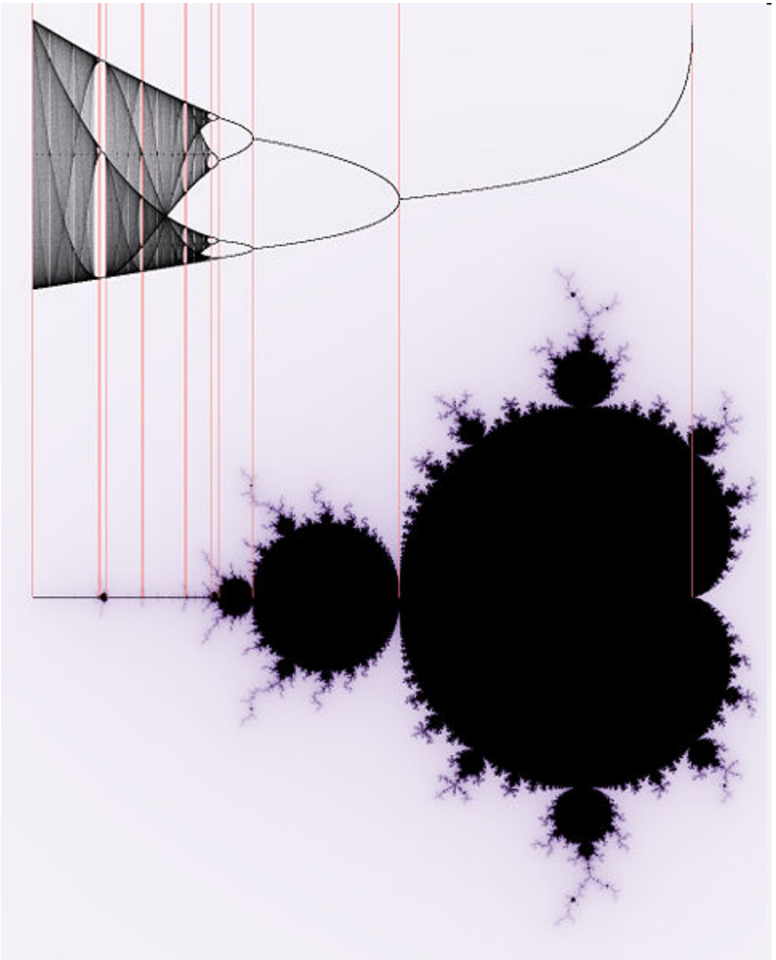
$z \to P_c(z) = z^2+c$

$0 \to P_c(0) \to P_c(P_c(0)) \to \ldots$

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \exists s \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |P_c^n(0)| \leq s\}.$$



Sammenhæng mellem Mandelbrot og Feigenbaum fraktalerne



$$c = \frac{1-(r-1)^2}{4}$$

z -> $P_c(z) = z^2+c$

x -> rx(1-x)

Endelige og tællelige mængder

Endelig: En mængde A er endelig, såfremt der findes et naturligt tal n, så A er ækvipotent med $N_n=\{0,1,\ldots,n-1\}$

Tællelig: En mængde A er tællelig, såfremt A enten er endelig eller ækvipotent med mængden af de naturlige tal N.

Uendelig: En mængde A er uendelig, såfremt A ikke er endelig.

N (de naturlige tal), Z (de hele tal) og Q (de rationelle tal) er uendelige men tællelige mængder.

R (de reelle tal) er en uendelig men ikke tællelig mængde.

Mængden af uendelige binære følger er ikke tællelig

$$\begin{array}{lllll}
a_0 = & a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \cdots \\
a_1 = & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots \\
a_2 = & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots \\
a_3 = & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & & \\
\cdot & & & &
\end{array}$$

$$a_{ij} \in \{0,1\}$$

$b_n = 1 - a_{nn}$

Følgen (b_n) kan ikke være med i nummereringen a_0, a_1, a_2, …

Thi, hvis $(b_n) = a_n$, så ville vi have

$b_n = 1 - a_{nn} = a_{nn}$

hvilket er en modstrid.

Mængden af de reelle tal er ikke tællelige

$C_0 = [0,1]$

C_{n+1} = Fjærn den miderste tredjedel I alle intervallerne i C_n, dvs.

erstat alle intervaller [a,b] i C_n med følgende to intervaller

$V[a,b] = [a,a+1/3(b-a)]$

$H[a,b] = [a+2/3(b-a),b]$

Svarenden til en binær følge c, definer følgen (F_{c0}, F_{c1}, F_{c2}, …) af lukkede intervaller

$$F_{c,0} = [0,1]$$

$$F_{c,n+1} = \begin{cases} VF_{cn} & hvis \quad c(n) = 0 \\ HF_{cn} & hvis \quad c(n) = 1 \end{cases}$$

Mængden af de reelle tal er ikke tællelige 2

Funktionen f fra mængden af binære følger ind i de reelle tal defineres ved

$$f(c) = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_{c,n}$$

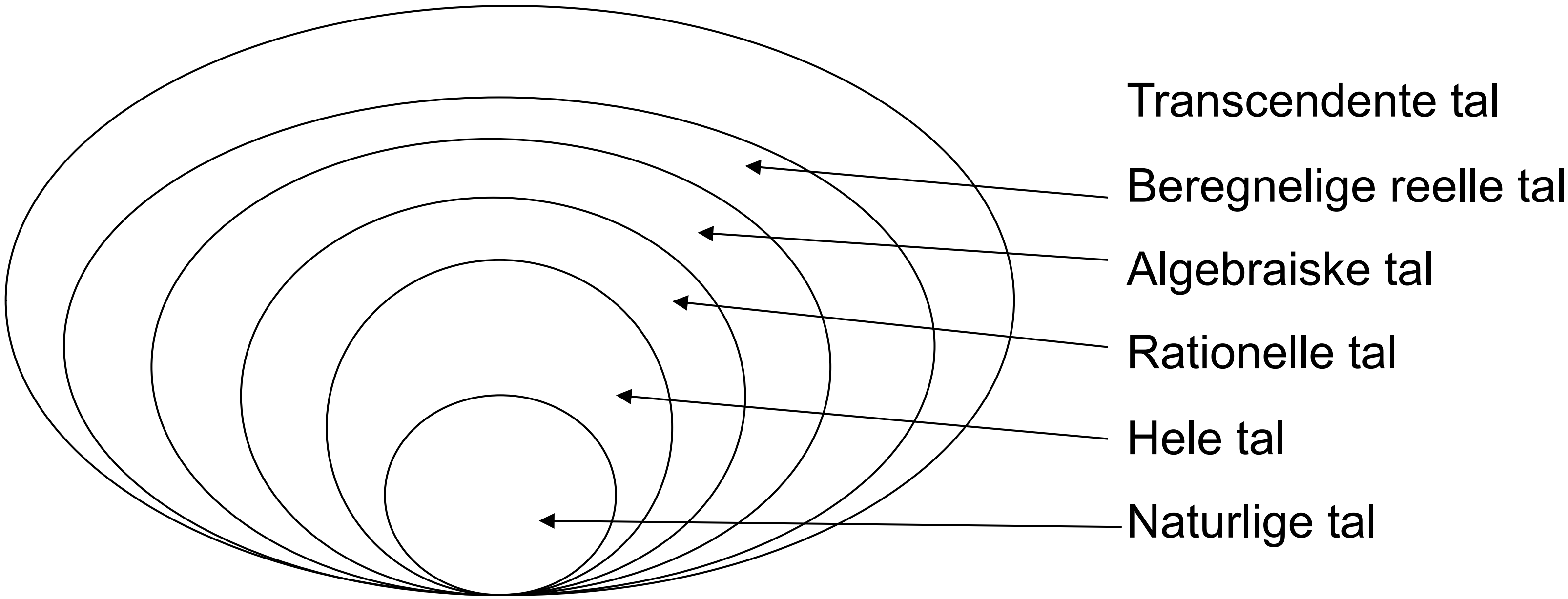
Cantors mængde defineres som

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

Funktionen f er en en-en-korrespondance mellem mængden af binære følger og Cantors mængde.

Da C er en delmængde af R og C er ækvipotent med mængden af binære følger, som ikke er tællelig, kan R heller ikke være tællelig.

Det reelle talsystem



Transcendente tal = Relle tal der ikke er algabraiske

Mængden af beregnelige tal er tællelig

Mængden af transcendente tal er ikke tællelig

π, γ og e er transcendente tal

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{k} - \log n\right)$$

Limit Points

Wenn in einem endlichen Intervalle eine Punktmenge gegeben ist, so ist mit ihr im allgemeinen eine zweite Punktmenge, mit dieser im allgemeinen eine dritte usw. gegeben, welche für die Auffassung der Natur der ersten Punktmenge wesentlich sind.

Um diese abgeleiteten Punktmengen zu definieren, haben wir den Begriff *Grenzpunkt [„Häufungspunkt"] einer Punktmenge* vorauszuschicken.

a is a limit point of P ↔ There are infinitely many points from P in every neighbourhood of a

Unter einem „Grenzpunkt einer Punktmenge *P*" verstehe ich einen Punkt der Geraden von solcher Lage, daß in jeder Umgebung desselben *unendlich* viele Punkte aus *P* sich befinden, wobei es vorkommen kann, daß er außerdem selbst zu der Menge gehört. Unter „Umgebung eines Punktes" sei aber hier ein jedes Intervall verstanden, welches den Punkt *in seinem Innern* hat.

Point sets of v'th kind

Es ist nun ein bestimmtes Verhalten eines jeden Punktes der Geraden zu einer gegebenen Menge P, entweder ein Grenzpunkt derselben oder kein solcher zu sein, und es ist daher mit der Punktmenge P die Menge ihrer Grenzpunkte *begrifflich* mit gegeben, welche ich mit P' bezeichnen und „die *erste abgeleitete Punktmenge* von P" nennen will.

Besteht die Punktmenge P' nicht aus einer bloß endlichen Anzahl von Punkten, so hat sie gleichfalls eine abgeleitete Punktmenge P'', ich nenne sie *die zweite abgeleitete von* P. Man findet durch ν solcher Übergänge den Begriff der ν^{ten} abgeleiteten Punktmenge $P^{(\nu)}$ von P.

As examples Cantor mentions that the 1'st derived set of the rational points in [0,1] is the real interval [0,1], and that

$$\{1,1/2,1/3,\ldots,1/n,\ldots\}' = \{0\}$$

A point set P is of kind v $\Leftrightarrow$ $P^{(v)}$ is finite.

Uendelige serier af afledede

P

P'

P''

$\vdots$

$P^{\infty} = \bigcap_{n} P^{(n)}$

$P^{\infty+1} = (P^{\infty})'$

$\vdots$

$P^{\infty+\infty}$

$\vdots$

$P^{n_0\infty^{\nu}+n_1\infty^{\nu-1}+\cdots+n_{\nu-1}\infty+n_{\nu}}$

$\vdots$

$0 = \emptyset$

$1 = \{0\}$

$2 = \{0,1\}$

$3 = \{0,1,2\}$

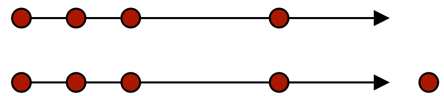
$\vdots$

$n+1 = n \cup \{n\}$

$\vdots$

$\omega = \{0,1,2,\cdots\}$

$\omega+1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0,1,2,\cdots,\omega\}$

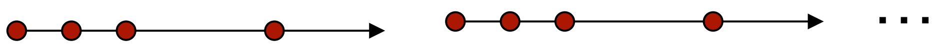


$\vdots$

$\omega+\omega = \bigcup_{n<\omega} \omega+n$

$\vdots$

ω^{ω}



$\vdots$

Ordinaltallene op til ω²

$$\omega \cong \left\{ \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \middle| n = 0,1,2,\cdots \right\}$$

$$\omega + 1 \cong \left\{ \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \middle| n = 0,1,2,\cdots \right\} \cup \{0\}$$

$$\omega + 2 \cong \left\{ \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \middle| n = 0,1,2,\cdots \right\} \cup \left\{0, \tfrac{1}{4}\right\}$$

$$\vdots$$

$$\omega + k \cong \left\{ \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \middle| n = 0,1,2,\cdots \right\} \cup \left\{0, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{7}{16}, \cdots, \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \right\}$$

$$\vdots$$

$$\omega + \omega \cong \left\{ \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \middle| n = 0,1,2,\cdots \right\} \cup \left\{ \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \middle| n = 0,1,2,\cdots \right\}$$

$$(\omega + \omega) + 1 \cong \left\{ \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \middle| n = 0,1,2,\cdots \right\} \cup \left\{ \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \middle| n = 0,1,2,\cdots \right\} \cup \left\{\tfrac{1}{2}\right\}$$

$$\vdots$$

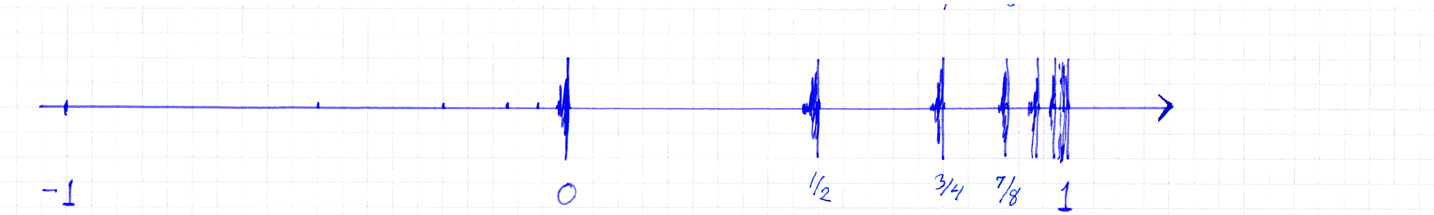
$$(\omega + \omega) + k \cong \left\{ \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \middle| n = 0,1,2,\cdots \right\} \cup \left\{ \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \middle| n = 0,1,2,\cdots \right\} \cup \left\{ \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{8}, \tfrac{11}{16}, \cdots, \tfrac{3}{4} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1} \right\}$$

$$\vdots$$

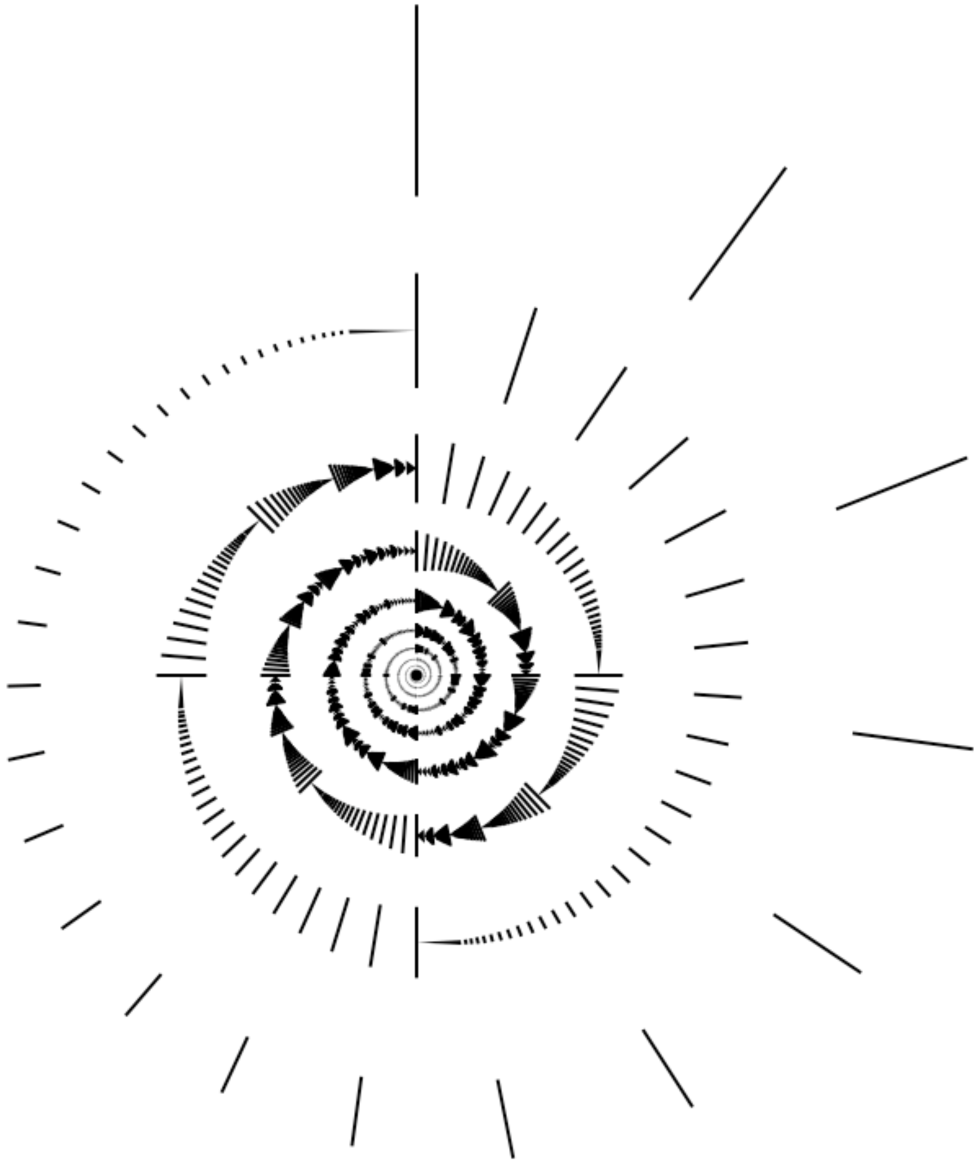
$$(\omega + \omega) + \omega \cong \left\{ \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \middle| n = 0,1,2,\cdots \right\} \cup \left\{ \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \middle| n = 0,1,2,\cdots \right\} \cup \left\{ \tfrac{3}{4} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+2} \middle| n = 0,1,2,\cdots \right\}$$

$$\vdots$$

$$(\omega + \omega) + \omega + \cdots = \omega \cdot \omega = \omega^2 \cong \bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ \tfrac{2^k - 1}{2^k} - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+k} \middle| n = 0,1,2,\cdots \right\}$$



Ordinaltallene op til ω^ω



Velordning

Der er en naturlig ordning på de kendte talsystemer $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$, idet

$a \leq b$ hvis, og kun hvis, $b - a$ er positiv og forskellig fra 0

Generelt siges mængden M at være ordnet ved relationen $\preceq$ såfremt der for alle a, b, c i M gælder

$$a \preceq a \tag{1}$$

$$a \preceq b \wedge b \preceq a \quad \Rightarrow \quad a = b \tag{2}$$

$$a \preceq b \wedge b \preceq c \quad \Rightarrow \quad a \preceq c \tag{3}$$

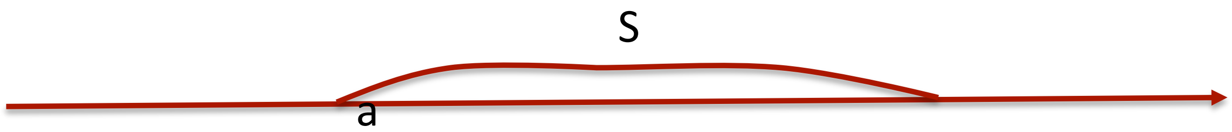
$$\tag{4}$$

Ordningen siges endvidere at være *total*, såfremt

$$a \preceq b \vee b \preceq a \vee a = b \tag{5}$$

Ordningen kaldes en vel-ordning, såfremt enhver ikke-tom delmængde af M har et mindste element, dvs.

$$\forall S \subseteq M[S \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \forall x \in S(a \preceq x)] \tag{6}$$



Klassen af Ordinaltal

Klassen af alle ordinaltal betegnes On. Bemærk at vi ikke kalder On en mængde. Det hænger sammen med, at var On en mængde, ville On, som er samlingen af alle ordinaltal, igen være et ordinaltal. Men så ville der være et ordinaltal større en On, nemlig $On + 1$, hvilket ville være en modstrid. Dette tilsyneladende paradoks kalder *Burali-Fortis paradoks*.

Det er en udbredt opfattelse, at dette paradoks blev formuleret af Cesare Burali-Forti i artiklen Burali-Forti [1897]. Men som Gregory H. Moore viser i Moore [1978] er dette ikke tilfældet.

Cantor var selv klar over, at klassen af alle ordinaltal, On, ikke kunne betragtes som en egentlig mængde. I et brev til Richard Dedekind (1831-1916) den 28. juli 1899 indførte Cantor en distinktion mellem egentlige mængder eller totaliteter og inkonsistente totaliteter. Cantor skriver:

> Hvis vi går ud fra begrebet om en bestemt mangfoldighed (et system, et indbegreb), så har det for mig vist sig nødvendigt at skelne mellem to slags mangfoldigheder (jeg mener altid *bestemte* mangfoldigheder).[5]

Inkonsistente Mangfoldigheder

> En mangfoldighed kan nemlig være sådan beskaffen, at antagelsen om en 'samværen' af alle dens elementer fører til en modstrid, så det er umuligt at opfatte mangfoldigheden som en enhed, som 'en færdig ting'. Den slags mangfoldigheder kalder jeg *absolut uendelige* eller *inkonsistente mangfoldigheder*.[6]

En egentlig mængde defineres således:

> Når derimod en mangfoldigheds samling af elementer kan tænkes som værende sammen, så det er muligt at sammenfatte dem til "*een* ting", så kalder jeg den en *konsistent mangfoldighed* eller en "mængde".[7]

Kardinaltal

Foruden ordinaltallene, der, som navnet antyder, er ordnede objekter, introducerede Cantor også *kardinaltallene*. Når der er tale om endelige tal, dvs. de naturlige tal, er der ingen forskel på ordinal- og kardinaltal. Men for uendelige tal er der en afgørende forskel. Cantor indfører det første uendelige kardinaltal som mægtigheden af mængden af naturlige tal. Dette tal betegnes

$$\aleph_0$$

dvs.

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}|$$

Det næste uendelige kardinaltal betegnes

$$\aleph_1$$

Kardinaltal fortsat

Vi får således en uendelig følge af kardinaltal

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots$$

Denne følge kan fortsættes langs alle ordinaltal

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots, \aleph_\omega \cdots, \aleph_\gamma \cdots$$

Klassen (eller systemet, som Cantor sagde) af alle $\aleph$-er betegnede Cantor med det hebraiske bogstab $\daleth$. Denne klasse var også en inkonsistent mangfoldighed:

> Systemet $\daleth$ af alle aleffer
>
> $$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots, \aleph_{\omega_1} \cdots$$
>
> danner en størrelsesordning, som er homomorf med systemet Ω [Cantors betegnelse for On], og dermed også er en inkonsistent absolut uendelig følge.[8]

Cantors Hovedproblemer

1. Kan de reelle tal velordnes?

2. Kontinuumshypotesen: Findes der mægtigheder mellem de rationelle tal og de reelle tal?

3. Generelle Kontinuumahypotese: Findes der for en vilkårlig uendelig mængde M mægtigheder mellem M og P(M)?

Strukturelle Aksiomer

ZF1: Ekstensionalitetsaksiomet.
To mængder a og b er identiske, hvis, og kun hvis, de har de samme elementer.

$$\forall a \forall b [a = b \leftrightarrow \forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b)]$$

ZF2: Funderingsaksiomet Det er ikke muligt i nogen mængde a at finde en uendelig nedadstigende kæde

$$\cdots x_2 \in x_1 \in x_0 \in a$$

af elementer i a, hvilket kan udtrykkes formelt således

$$\forall a [\exists x (x \in a) \rightarrow \exists x (x \in a \wedge \forall y (y \notin x))]$$

Eksistensaksiomer

ZF3: Den tomme mængde. Der findes en mængde a uden elementer

$$\exists a \forall x [x \in a \leftrightarrow x \neq x]$$

Den tomme mængde er entydigt bestemt og betegnes $\emptyset$.

ZF4: Uendelighedsaksiomet. Der findes en mængde a, i hvilken der er en opadstigende kæde

$$x_0 \in x_1 \in x_2 \in \cdots \in a$$

af elementer. Formelt kan det udtrykkes således

$$\exists a [\exists x \in a \wedge \forall x [x \in a \to \exists y (y \in a \wedge x \in y)]$$

Konstruktionsaksiomer

ZF5: Par-aksiomet. Hvis a og b er mængder, så er $\{a, b\}$ også en mængde. Det vil sige, at funktionen

$$(a, b) \mapsto \{a, b\}$$

er veldefineret. Dette kan udtrykkes formelt på denne måde

$$\forall a \forall b \exists c \forall x [x \in c \leftrightarrow x = a \wedge x = b]$$

ZF6: Foreningsmængdeaksiomet. Hvis a er en mængde af mængder, så kan man danne en mængde bestående af foreningen af alle mængderne i a. Det vil sige, at funktionen

$$a \mapsto \bigcup a$$

er veldefineret. Formelt kan vi udtrykke det således

$$\forall a \exists c \forall x [x \in c \leftrightarrow \exists y (y \in a \wedge x \in y)]$$

ZF7: Potensmængdeaksiomat. Til enhver mængde a kan vi danne potensmængdenmængden $\mathcal{P}(a)$, som består af alle delmængder af a. Det vil sige, at funktionen

$$a \mapsto \mathcal{P}(a)$$

er veldefineret. Formelt udtrykkes det ved

$$\forall a \exists c \forall x [x \in c \leftrightarrow x \subseteq a)]$$

Konstruktionsaksiomer

ZF8: Delmængdeaksiomet. Antag, at mængden a allerede er dannet, og at $\varphi(x)$ er en veldefineret formel. Da kan vi danne mængden $\{x \mid x \in a \wedge \varphi(x)\}$. Det vil sige, at funktionen

$$a \mapsto \{x \mid x \in a \wedge \varphi(x)\}$$

er veldefineret. Det formelle aksiom er

$$\forall a \exists c \forall x [x \in c \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x)]$$

ZF9:Adskillelsesaksiomet. Hvis mængden a allerede er dannet, og $\varphi(x, y)$ definerer en funktion på a, da kan vi danne billedmængden

$$\{y \mid \exists x \in a \varphi(x, y)\}$$

Formelt formuleres aksiomet således

$$\forall a [\forall x \in a \exists ! y \varphi(x, y) \rightarrow \exists b (\forall y (y \in b \rightarrow \exists x \in a \varphi(x, y)))]$$

Udvalgsaksiomet

ZF10: Udvalgsaksiomet. Hvis a er en mængde af mængder, som alle er ikke-tomme og disjunkte, så findes der en mængde b, som består af netop eet element fra hver af mængderne i a

$$\forall a[\forall x[x \in a \to x \neq \emptyset \wedge \forall y(y \in z \to x \cap y = \emptyset \vee x = y)]$$

$$\to \exists b \forall x \exists v(x \in z \to b \cap x = \{v\})]$$

Zermelos formulering af udvalgsaksiomet

Det foreliggende bevis beror på den forudsætning, at overdækningen eksisterer, altså på det princip, at også for en uendelig samling af mængder findes der altid tilordninger, som til hver mængde tilordner et at dens elementer, eller formelt udtrykt, at produktet af en uendelig samling mængder, som hver mindst har et element, selv er forskellig fra nul [den tomme mængde]. Dette logiske princip lader sig ikke føre tilbage til et endnu simplere princip, men bliver uden betænkelighed anvendt overalt i den matematiske deduktion.

E. Zermelo. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Math. Ann., 59* (4), 1904, p. 516

For enhver ikke-tom mængde M er det muligt at finde en udvalgsfunktion f defineret på P(M)\Ø, hvor f(A) er element i A.

Gödels og Cohens Resultater

Zermelo-Fraenkels mængdelære består af aksiomerne ZF1-ZF9 og betegnes ZF.

Udvalgsaksiomet = ZF10 = AC

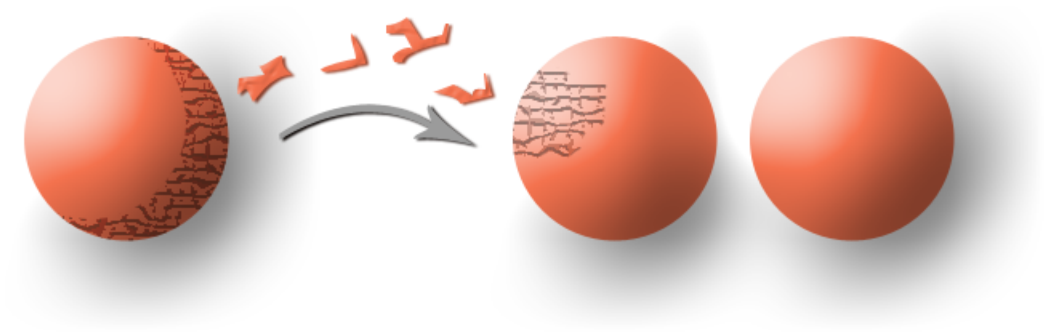
Kontinuumshypotesen: Der er ingen mægtigheder mellem Q og R

Den generaliserede kontinuumshypotese: Der er ingen mægtigheder mellem M og P(M). Betegnes GH.

$$\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$$

Både AC og GH er uafhængige af ZF. Det betyder: Hvis ZF er konsistent, så han AC, GH, -AC og –GH tilføjes til ZF uden at der opstår en modstrid.

Banach-Tarskis Paradoks



En kugle kan opdeles i endelig mange dele, som så kan sættes sammen til to kugler, der er kongruente med den oprindelige kugle.

Anden udgave: Det er muligt at finde to kongruente ”figurer”, A og B, på en kugleoverflade, hvor man fra A kan fjerne uendelig mange punkter, så B og den modificerede A-figur fortsat er kongruente.

Kontinuitet og følgekontinuitet

En reel funktion f er **kontinuitet** i x_0, såfremt der gælder

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0| < \varepsilon \right)$$

En reel funktion f er **følge-kontinuitet** i x_0, såfremt der for en vilkårlig talfølge $(x_n) \to x_0$ gælder $(f(x_n)) \to f(x_0)$

Hvis udvalgsaksiomet gælder, er de to former for kontinuitet identiske.

Hvis udvalgsaksiomet er falsk, er de to former for kontinuitet ikke identiske.

Yderligere Konsekvenser af AC

- Ethvert vektorrum har en basis
- Produktmængden af ikke-tomme mængder er ikke tom
- Zorns lemme: Hvis enhver kæde i en partielt ordnet mængde har en øvre grænse, så har mængden et maksimalt element.
- Hahn-Banachs sætning: En lineær funktional, defineret på et delrum af et vektorrum, som er begrænset af en seminorm, kan udvides til en lineær funktional, begrænset af samme seminorm, på hele rummet.
- Eksistens af ikke-trivielle ultrafiltre.