Matematik: Videnskaben om det uendelige 1

Ottende forelæsning: Den aksiomatiske metode I

Klaus Frovin Jørgensen

8. november, 2010

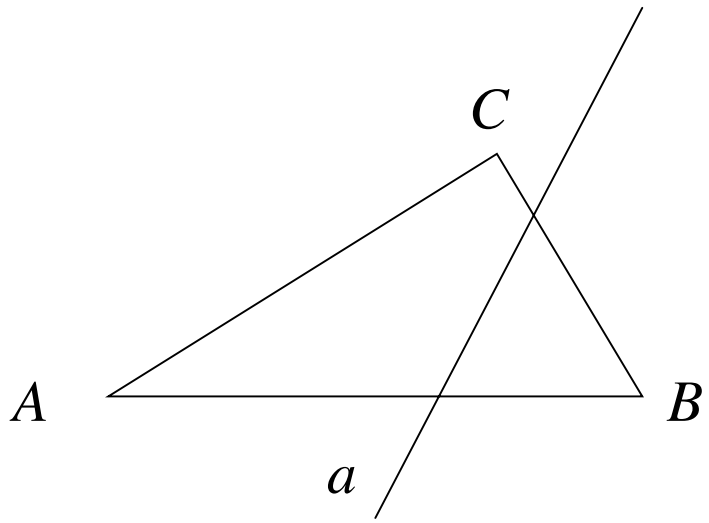
Hvorfor aksiomatiserer vi i matematikken?

Situationen i 1800-tallets matematik

- Indivisibler plagede f.eks. Bolzano, men status af de reelle tal blev mere og mere afklaret (Bolzano, Cauchy, Dedekind, Cantor, Weierstrass)
- Geometrien blev undersøgt dybere (Pasch, Hilbert)
- Uendelige ikke-konstruktive metoder skabte resultater (eks. Hilberts basissætning)
- Weierstrass-funktionen var kontinuert men intet-steds differentiabel
- Fraktaler sås som patologiske (Eks. Hilberts kurve, Cantor-mængden)
- Den naive mængdelære krævede detaljerede undersøgelser

Moritz Pasch (1841-1920)
Sikkerhed og begrundelse

Paschs aksiom (omskrevet). En linje, som skærer en kant af en trekant (ikke i et hjørne), skærer en af de to øvrige kanter.



"Hvis geometrien virkelig skal være sikker, så må beviset være fri for enhver form for reference til betydningen af de geometriske begreber og ligeledes være uafhængig af figurer. Vi vil således kun anerkende de beviser, hvor alle trin i beviset enkeltvist kun refererer til foregående sætninger og definitioner." (Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie,* 1882)

Dedekind (1831-1916): Begrebsafklaring(1/2)

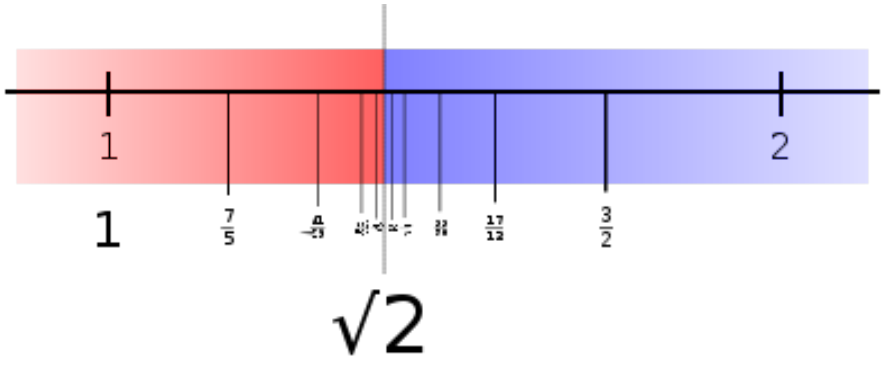
"[I]n the autumn of 1858. As professor in the Polytechnic school in Zürich I found myself for the first time obliged to lecture upon the elements of the differential calculus [...] I had recourse to geometric evidence."

"But that this form of introduction into the differential calculus can make no claim to being scientific, no one (will deny). For myself this feeling of dissatisfaction was so overpowering that I made the fixed resolve to keep meditating on the question till I should find a purely arithmetic and perfectly rigorous foundation for the principles of infinitesimal analysis"

Dedekind (1831-1916): Begrebsafklaring(2/2)

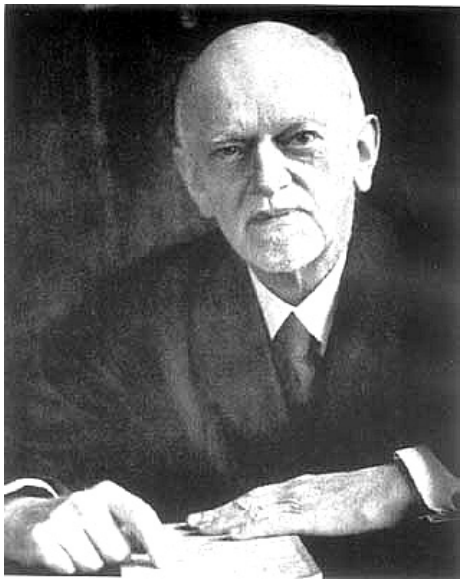
"It then only remained to discover its [the intermediate value theorem] true origin in the elements of arithmetic and thus at the same I time to secure a real definition of the essence of continuity. I succeeded on Nov. 24, 1858" (Dedekind, *Essays on the theory of number*, 1963)

Dedekind introducerede (dvs. aritmetiserede) de reelle tal som (ækvivalensklasser af) Dedekind snit.



Hilbert og den aksiomatiske metode

David Hilbert (1862-1943) "Über den Zahlbegriff" er en lille artikel fra 1899.



"Trotz des hohen pädagogischen und heuristischen Wertes der genetischen Methode verdient doch zur endgültigen Darstellung und völligen logischen Sicherung des Inhaltes unserer Erkenntnis die axiomatische Methode den Vorzug." (Hilbert, 1899)

De to metoder i samspil

Vi skal se, hvordan den generiske og den aksiomatiske metode faktisk *vekselvirker* i matematikken.

Vi vil se, at ontologisk set er den generiske metode en såkaldt bottom up metode, hvorimod den aksiomatiske er en top down metode.

Det filosofiske grundlag for den generiske metode

Begreber og objekter

- *Subjekt-prædikat*-domme

  "s er P"

  er udtryk for basal erkendelse (s er dommens subjekt og P prædikatet).

  Dommen bygger bro mellem:

  - Det abstrakte/begrebslige (erkendelsen)
  - Det konkrete/objekterne (verden)

- Platons *idelære* handler (blandt andet) om dette.

"Per er menneske"

"Postkassen er rød"

Types og tokens (1/4)

- *Type-token*: En vigtigt distinktion imellem kategori og et element af kategorien.
- En *type* eksemplificeres af en *token*.

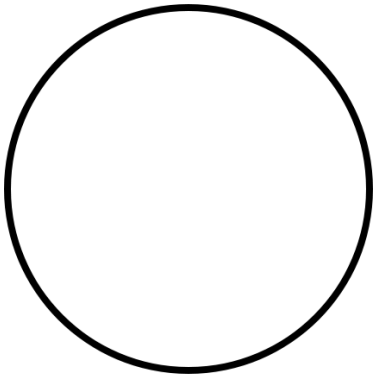
Type

Token

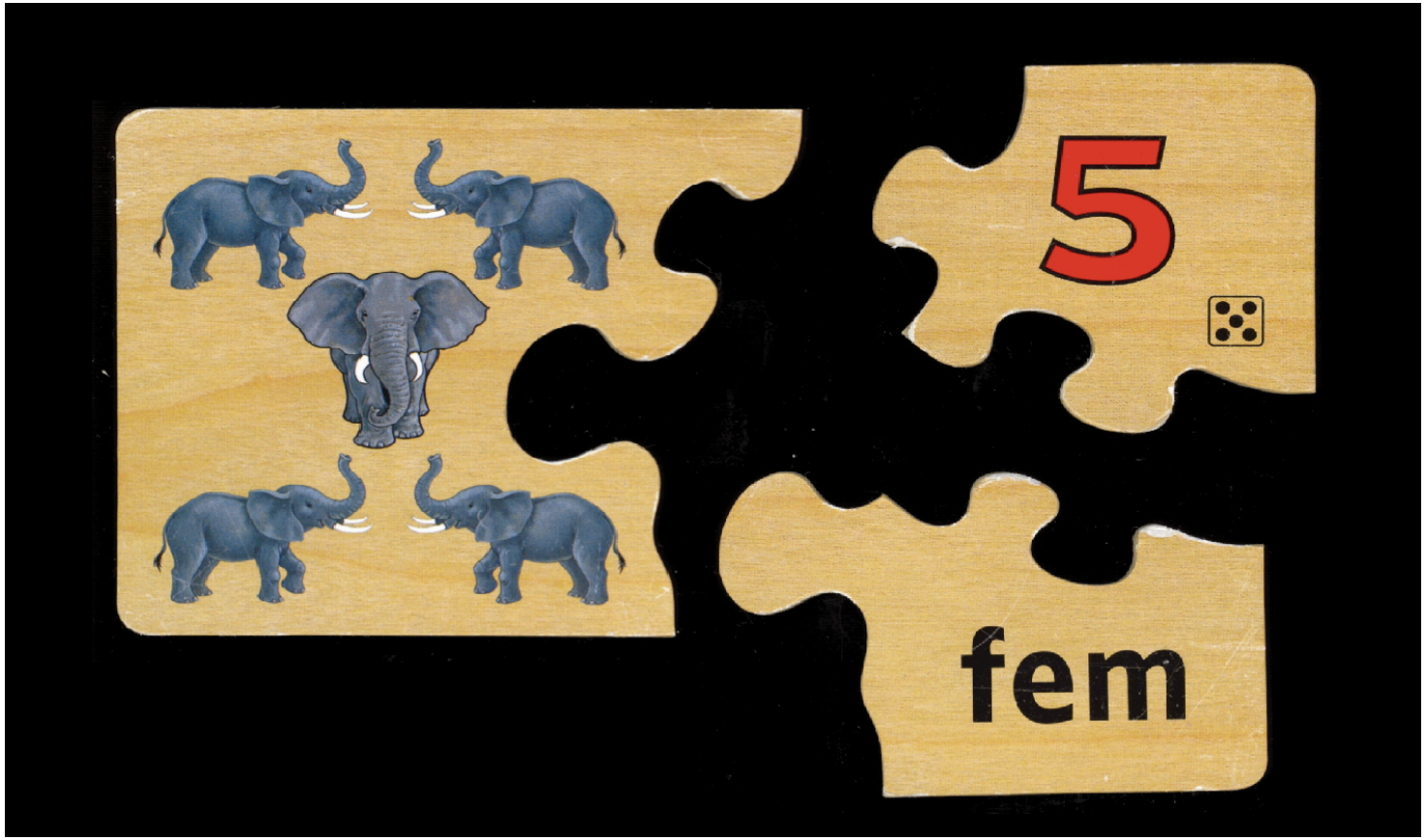
- Når vi fælder *subjekt-prædikat-domme* benytter vi types (prædikaterne) og refererer til tokens (objekterne). Begreberne "menneske", "rød" og "hest" er eksempelvis types.

Types og tokens (2/4)

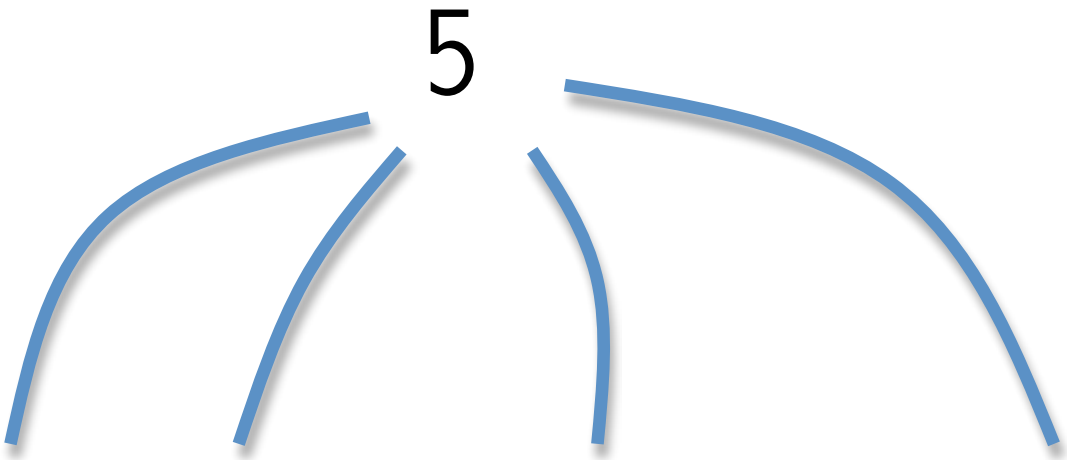
Brugen af *types* og *tokens* er helt fundamental for erkendelsen.

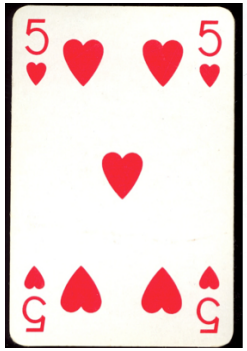


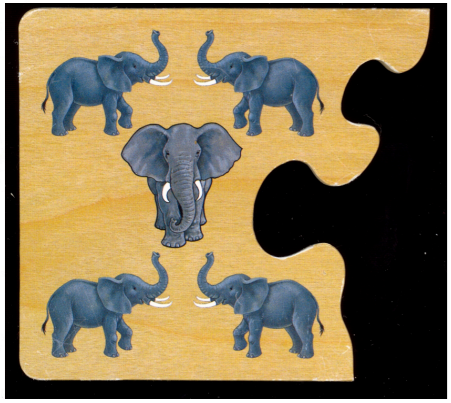
Types og tokens (3/4)

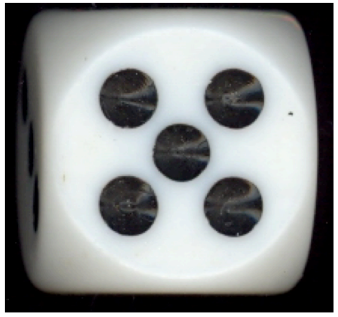


Types og tokens (4/4)









Ækvivalensrelationer (1/4)

Vi siger, at $\sim$ er en ækvivalensrelation over D, når den er refleksiv, symmetrisk og transitiv, dvs. hvis det for alle elementer i D gælder at:

i) $x \sim x$

ii) $x \sim y$ medfører $y \sim x$

iii) $x \sim y$ og $y \sim z$ medfører $x \sim z$

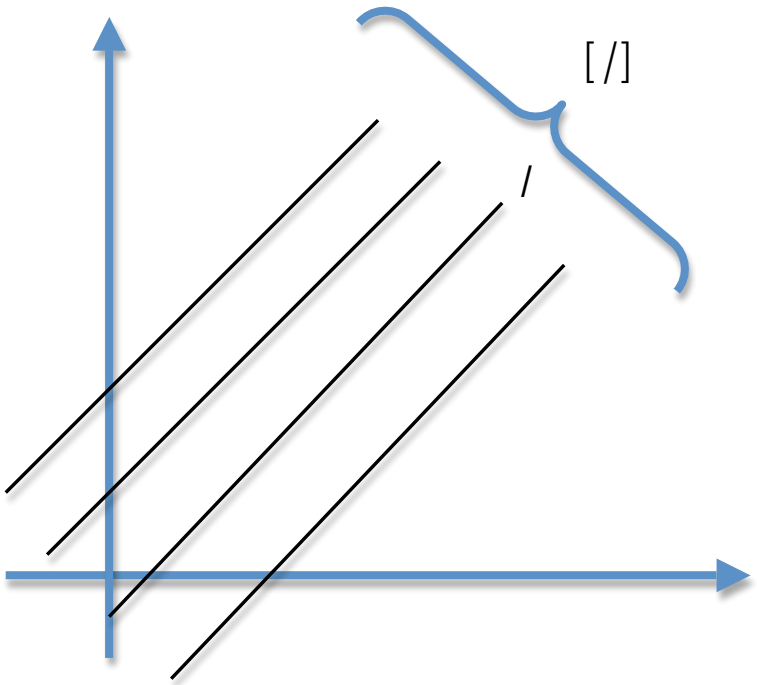
Eksempler

- "har samme farve som"
- "er parallel med"
- "er lig med"
- "kongruent modulus n"
- "er ækvipotent med"
- ...

Vi betegner med $[x]$ klassen af alle elementer fra D, som er ækvivalente med x, det vil sige:

$$[x] = \{y \in D \mid y \sim x\}$$

Ækvivalensrelationer (2/4)



Ækvivalensklassen til linjen l under ækvivalensrelationen "er parallel med".

Ækvivalensrelationer (3/4)

Lad D være en mængde og $\sim$ en ækvivalensrelation over D. Der gælder nu følgende:

Fact. For alle $x, y \in D$ har vi, $[x] = [y]$ eller $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Bevis. Givet x og y fra D gælder der, at enten har de mindst et element til fælles, eller også har de ingen elementer tilfælles. Altså, enten

$$[x] \cap [y] = \emptyset \text{ eller } [x] \cap [y] \neq \emptyset$$

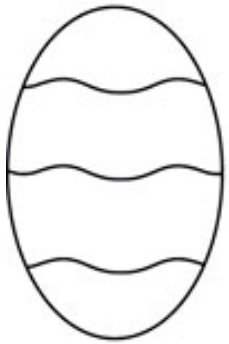
Hvis det første er tilfældet, er vi færdige. Antag derfor, at der findes z, som er element i både $[x]$ og $[y]$. Vis nu – som *øvelse* – at $[x] = [y]$.

Ækvivalensrelationer (4/4)

Vi har altså:

Sætning. Ækvivalensklasserne udgør en disjunkt forening af hele mængden.

Givet et mængde D og en ækvivalensrelation $\sim$ kan vi gruppere D mht. ækvivalent 'opførsel'.



Ækvivalensklasser som objekter

På baggrund af en mængde D og ækvivalensrelation $\sim$ konstruerer vi $[a]$. Hvordan kan vi opfatte ækvivalensklassen som et objekt?

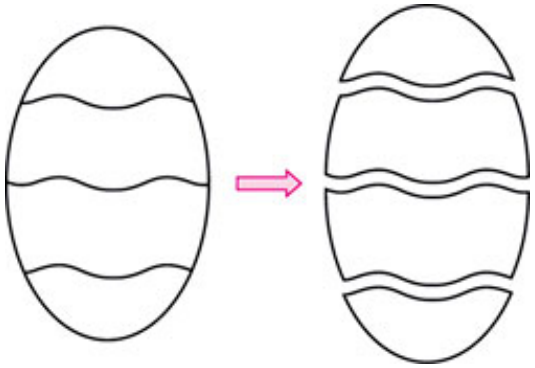
Vores håndtering af de 'oprindelige' objekter *løftes* til de nye, da

$$[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b.$$

Vi håndterer/opererer med de 'nye' objekter (nemlig ækvivalensklasserne) ved hjælp af de 'gamle' objekter (repræsentanterne).

Vi samler alle ækvivalensklasserne i en såkaldt *kvotient-struktur*:

$$X/\sim = \{[a] \mid a \in D\}.$$



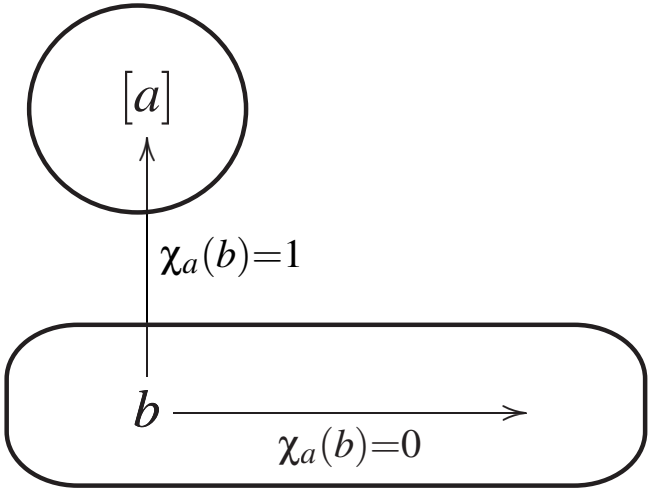
Ækvivalensklasser og generatorer

En ækvivalensrelation $\sim$ har en *karakteristisk funktion*:

$$\chi(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } a \sim b, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi kan parametrisere χ:

$$\chi_a(b) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } a \sim b, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$



Således kan vi (intensionelt) forstå en ækvivalensklasse som genereret af et i) paradigmatisk eksempel samt ii) den tilhørende karakteristiske funktion.

Naturlige tal som *konceptuelle* objekter (1/2)

Betegn "er parvist relateret til" med $\sim_N$. Det vil sige:

$$a \sim_N b \Leftrightarrow \text{der ekisterer en bijektiv afbildning mellem } a \text{ og } b.$$

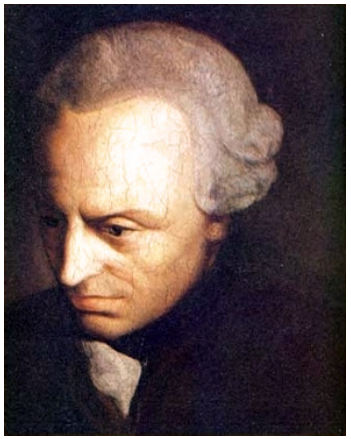
Vi forstår da et naturligt tal som bestående af

1. Et *prototypisk* eksempel,
2. Den tilhørende *karakteristiske funktion*.

Naturlige tal som *konceptuelle* objekter (2/2)

- De naturlige tal forstår vi som ækvivalensklasser givet ved prototypiske eksempler, f.eks. fingrene eller det som Hilbert kaldte de oprindelige tegn og så de tilhørende karakteristiske funktioner.
- Netop fordi tallene forstås som ækvivalensklasser, kan vi håndtere tallene ved deres repræsentationer, for eksempel prototyperne.
- Vi kan operere med de naturlige tal som objekter, ligesom vi opererer med alle andre typer af objekter. Vi kan *genkende, adskille, konstruere, undersøge* og *bruge* dem.

Kant (1724-1804) om tallene (1/2)



Distinktionen imellem tal (som ækvivalensklasser) og repræsentationer er at finde i en mere generel version i Kants erkendelsesteori, hvor der skelnes imellem begreber og anskuelser:

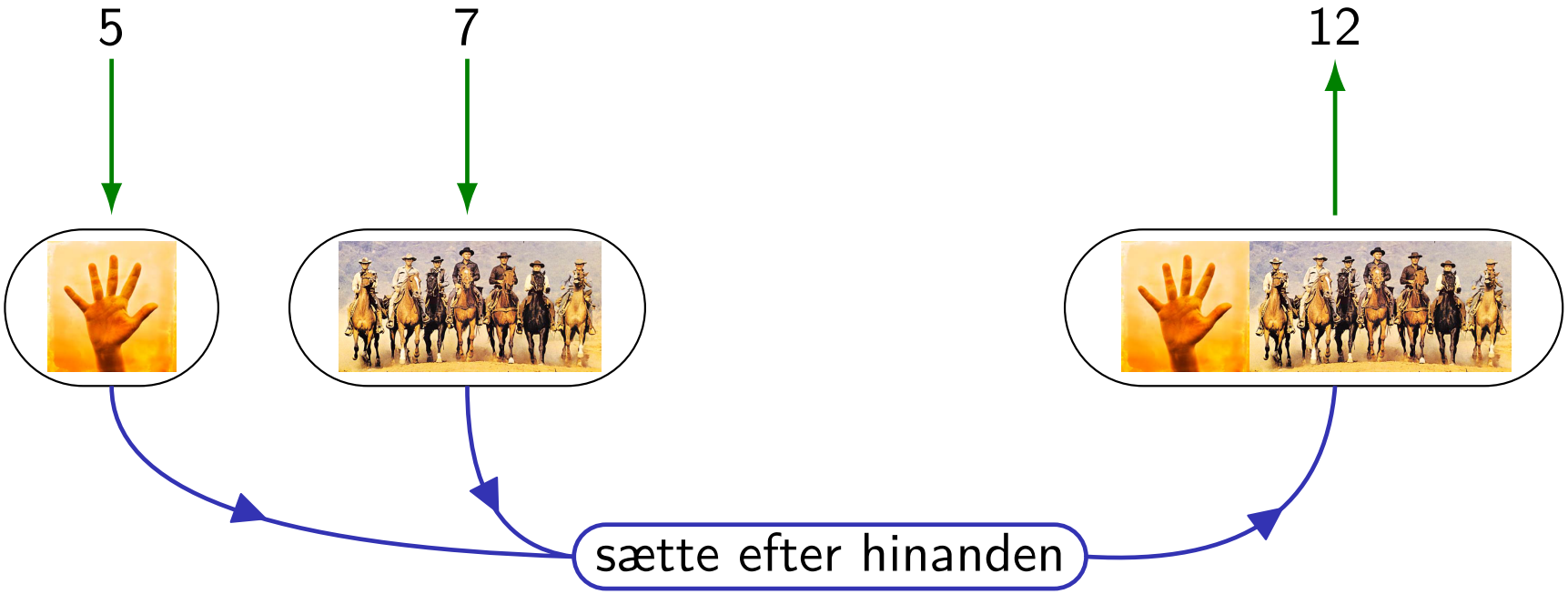
"Tanker uden indhold er tomme, anskuelser uden begreber er blinde." (Kant, *Kritik af den rene fornuft*, A 51/B 75)

Distinktionen imellem tal som types og repræsentationer heraf forklarer ifølge Kant, hvordan vi lægger to tal sammen. Dette viser yderligere – ifølge Kant – hvorfor eksempelvis $5 + 7 = 12$ er en syntetisk (altså ikke-tautologisk) sætning (*se næste slide*).

Kant (1724-1804) om tallene (2/2)

Begrebet *tolv* er på ingen måde alle medtænkt, når jeg tænker på foreningen af syv og fem. Jeg kan analysere mit begreb om en sådan forening så meget, jeg vil, og alligevel støder jeg ikke på *tolv* i det. Man må altså gå hinsides begrebet og gøre brug af den anskuelse, der svarer til det ene af de to tal, eksempelvis sine fem fingre eller (som Segner i sin aritmetik) fem punkter, hvorefter man led for led tilføjer enhederne i de i anskuelsen givne fem til begrebet syv. Jeg tager altså først tallet 7, og idet jeg for begrebet 5 tager min hånds fingre til hjælp som anskuelse, tilføjer jeg nu til mit billede de enheder, som jeg før har bragt sammen for at danne tallet 5, den ene efter den anden til tallet 7, hvorpå jeg ser tallet 12 træde frem. (Kant, *Kritik af den rene fornuft*, B 15-6)

Addition gennem tokens/repræsentanter



Hvad har vi indtil nu opnået?

Generelt har vi set, at:

- Et basalt element i erkendelsen er distinktionen imellem types og tokens.
- Ækvivalensrelationer gør det muligt at:
  - Operere med types *som* tokens
  - At forstå højere-ordens-objekter ved hjælp af i) lavere-ordens-objekter og ii) den karakteristiske funktion

Mere *specifikt* har vi set, hvordan naturlige tal:

- Både kan være types og tokens
- Kan forstås som konceptuelle objekter

Generelt om den generiske metode

- Types,
- tokens og
- konstruktion af ækvivalensklasser

gennemsyrer – som vi nu skal se – den generiske opbygning af tallene: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ og $\mathbf{R}$.