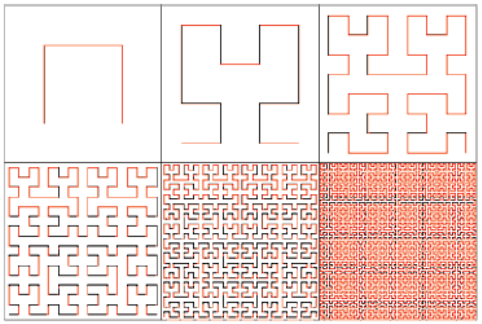
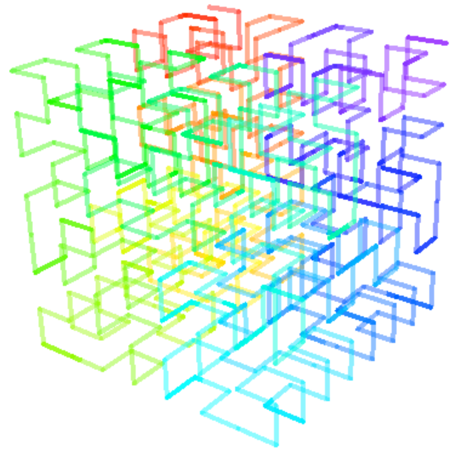
Finitisme og Konstruktivisme

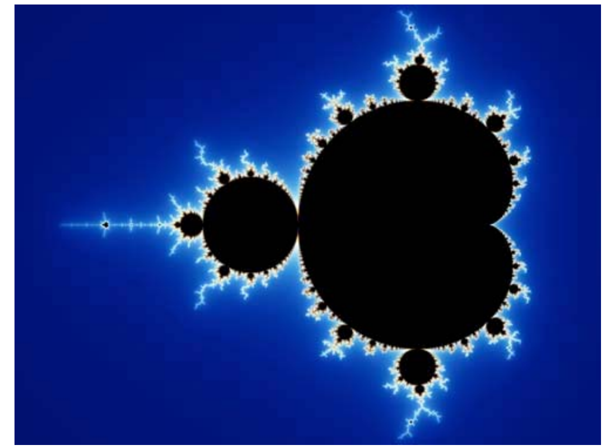
22. November 2010

Fraktaler

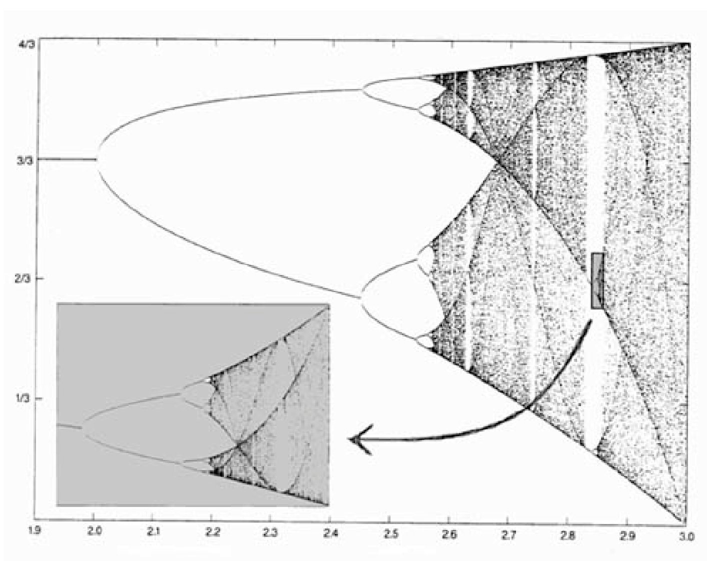


Hilbert

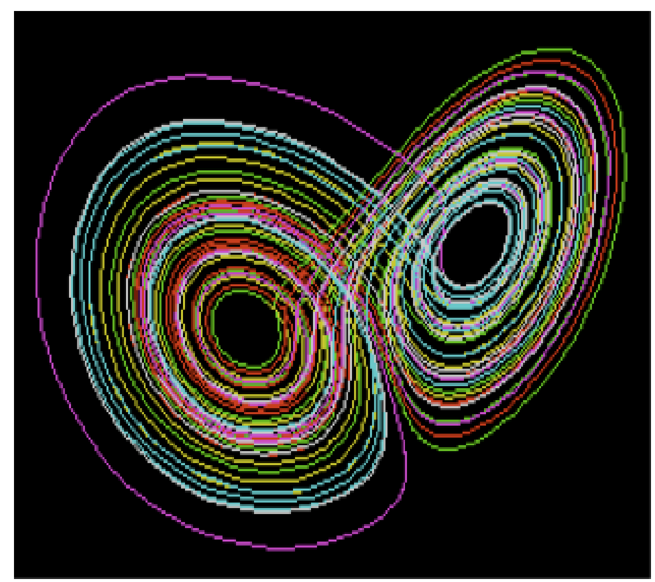




Mandelbrot



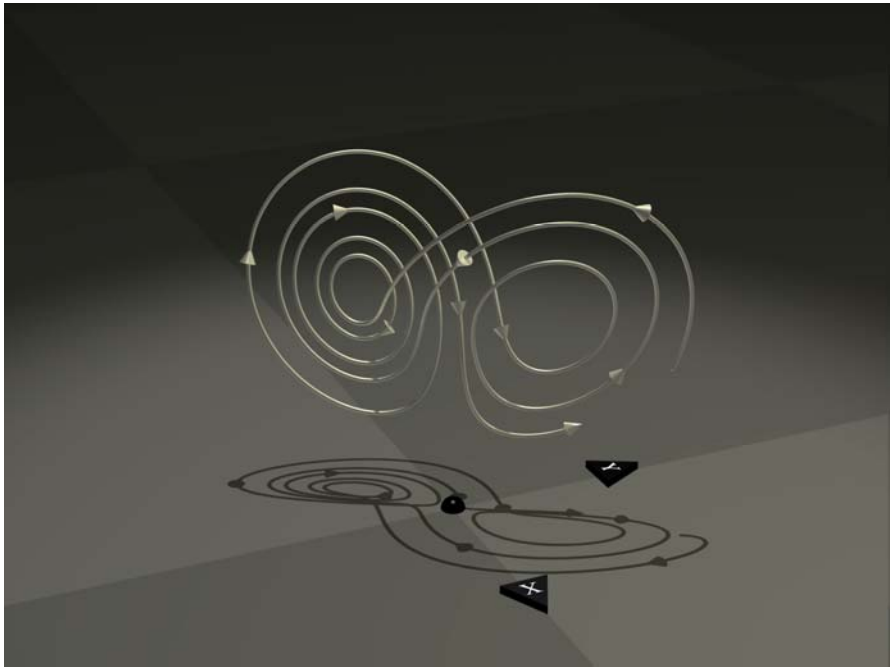
Feigenbaum



Lorenz

Lorenz-Ligningerne

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

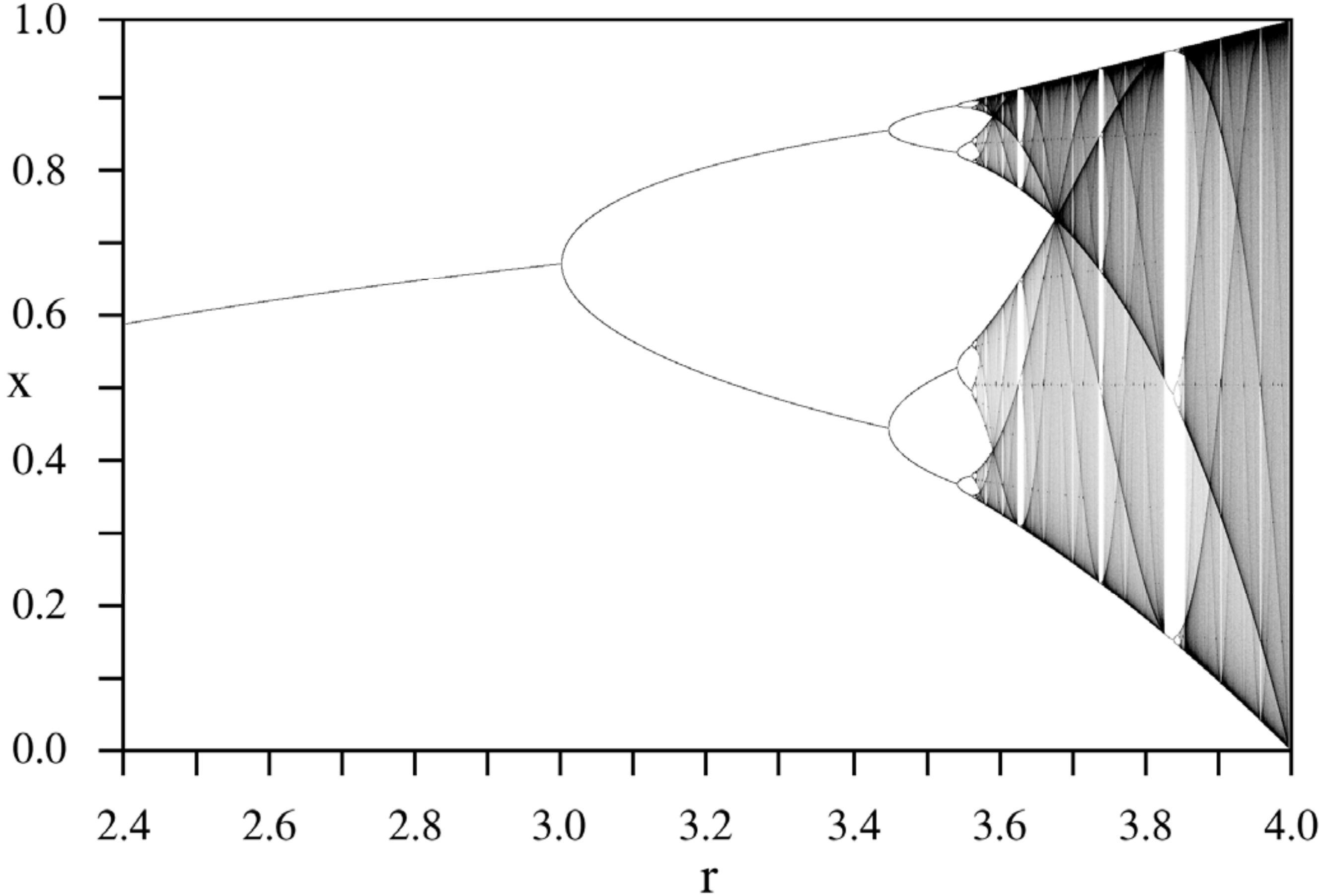


σ = 10

β = 8/3

ρ =28

Logistisk vækst



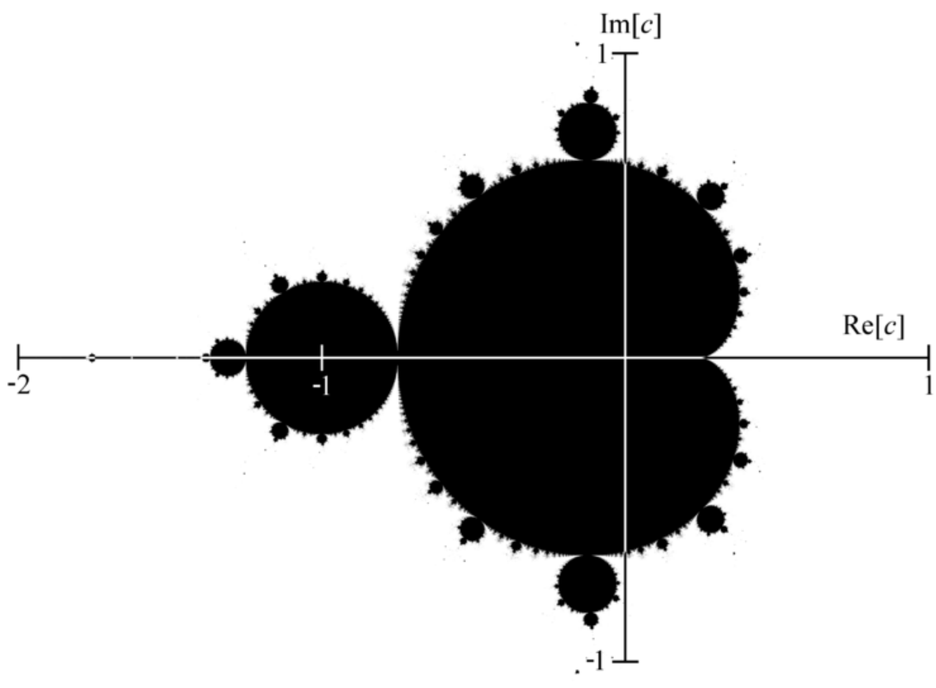
x -> rx(1-x)

Mandelbrots fraktal

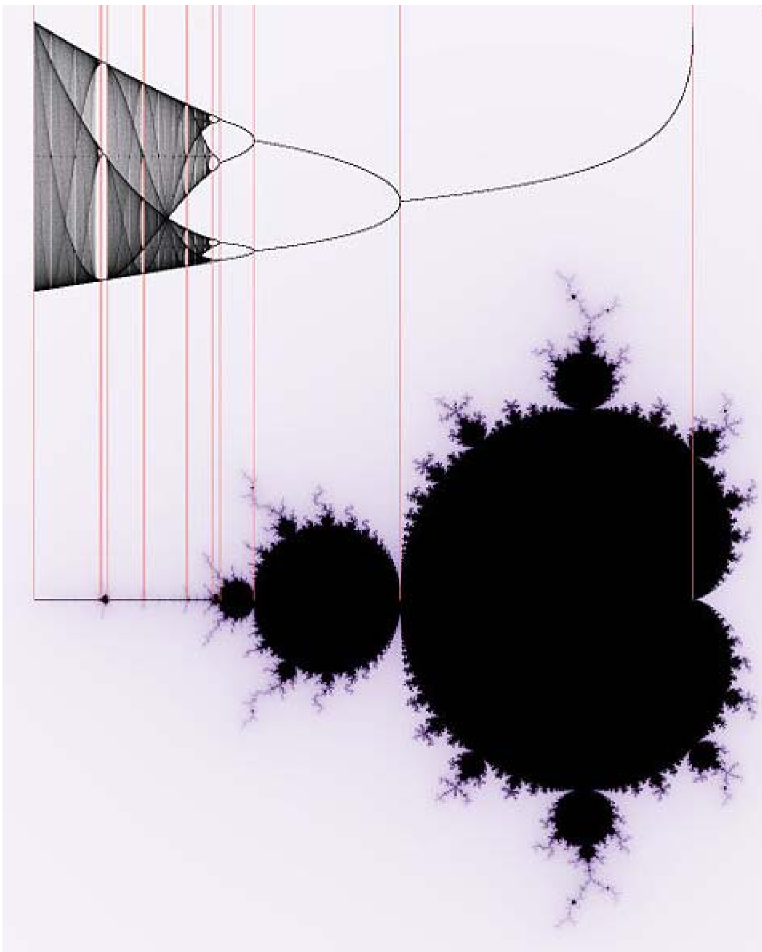
$z \rightarrow P_c(z) = z^2+c$

$0 \rightarrow P_c(0) \rightarrow P_c(P_c(0)) \rightarrow \ldots$

$$M = \{c \in \mathbb{C} : \exists s \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |P_c^n(0)| \leq s\}.$$



Sammenhæng mellem Mandelbrot og Feigenbaum fraktalerne



$$c = \frac{1-(r-1)^2}{4}$$

z -> $P_c(z) = z^2+c$

z -> rz(1-z)

Mængden af uendelige binære følger er ikke tællelig

$$
\begin{array}{lllll}
a_0 = & a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \cdots \\
a_1 = & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots \\
a_2 = & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots \\
a_3 = & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

$$a_{ij} \in \{0,1\}$$

$b_n = 1 - a_{nn}$

Følgen (b_n) kan ikke være med i nummereringen a_0, a_1, a_2, …

Thi, hvis $(b_n) = a_n$, så ville vi have

$b_n = 1 - a_{nn} = a_{nn}$

hvilket er en modstrid.

Mængden af de reelle tal er ikke tællelige

$C_0 = [0,1]$

C_{n+1} = Fjærn den miderste tredjedel I alle intervallerne i C_n, dvs.

erstat alle intervaller [a,b] i C_n med følgende to intervaller

$V[a,b] = [a,a+1/3(b-a)]$

$H[a,b] = [a+2/3(b-a),b]$

Svarenden til en binær følge c, definer følgen (F_{c0}, F_{c1}, F_{c2}, …) af lukkede intervaller

$$F_{c,0} = [0,1]$$

$$F_{c,n+1} = \begin{cases} VF_{cn} & hvis \quad c(n) = 0 \\ HF_{cn} & hvis \quad c(n) = 1 \end{cases}$$

Mængden af de reelle tal er ikke tællelige 2

Funktionen f fra mængden af binære følger ind i de reelle tal defineres ved

$$f(c) = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_{c,n}$$

Cantors mængde defineres som

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

Funktionen f er en en-en-korrespondance mellem mængden af binære følger og Cantors mængde.

Da C er en delmængde af R og C er ækvipotent med mængden af binære følger, som ikke er tællelig, kan R heller ikke være tællelig.

En vigtig Binomial-formel

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$$

Bevis

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} &= (-1)^0\binom{n}{0}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}+(-1)^n\binom{n}{n}\\
&=1+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\left[\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}\right]+(-1)^n\\
&=1+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i-1}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}+(-1)^n\\
&=1+\sum_{i=0}^{n-2}(-1)^{i+1}\binom{n-1}{i}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}+(-1)^n\\
&=1+(-1)^1\binom{n-1}{0}+\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{i+1}\binom{n-1}{i}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}+(-1)^n\\
&=1-1+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}+(-1)^n\\
&=1-1+(-1)^{n-1}+(-1)^n\\
&=0
\end{aligned}$$

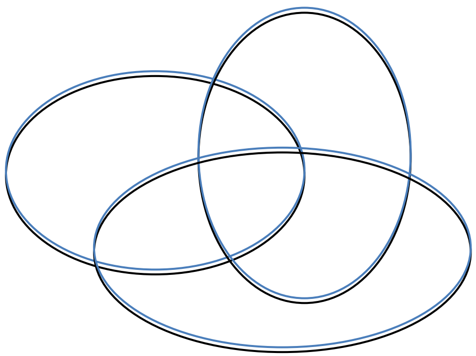
The Sieve Principle

Hvis A og B er endelige mængder, så gælder

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Hvia A, B og C er endelige mængder, så gælder

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$
$$= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$$



Hvis A_1, A_2, … A_n er endelige mængder, så gælder

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \alpha_i = \alpha_1 - \alpha_2 + \cdots + (-1)^{n-1} \alpha_n$$

hvor α_i er summen af kardinaliteterne af fællesmængderne af i eksemplarer af mængderne A_1, A_2, … A_n, dvs

$$\alpha_i = \sum_{k_1 \neq k_2 \neq \cdots \neq k_i} |A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_i}|$$

Derangerproblemet

Lad A være en mængde med n elementer. Vi betegner elementerne i A med tallene 1,2,3,…,n. En permutation på A er en bijektiv afbildning på A. Vi skriver en permutation p således

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots & n \\ p_1 & p_2 \cdots & p_n \end{pmatrix} \qquad hvor \ p_1 \neq p_2 \neq \cdots \neq p_n$$

Sætning: Antallet d_n af permutationer, p, hvor intet element overføres i sig selv, dvs. hvor $p_i \neq i$ er

$$d_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}) = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

Bevis: Lad P(n) være mængden af alle permutationer på A. Lad A_i være mængden af permutationer p, hvor p_i = i. Nu er

$$\begin{aligned} d_n &= |P(n)| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ &= n! - \alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + (-1)^n \alpha_n \end{aligned}$$

hvor α_r er antallet af permutationer, som fikserer r givne elementer, for alle mulige valg af r symboler. Dvs.

$$\alpha_r = \binom{n}{r}(n-r)! = \frac{n!}{r!}$$

Indsættes værdien for α_r , fås det ønskede resultat.

Opgaver

1. En sekretær i en virksomhed skal putte 6 forskellige breve i konvolutter til 6 forskellige kunder. Hun putter brevene tilfældigt i konvolutter. Hvad er sandsynligheden for at alle breve kommer i forkerte konvolutter? (Løsning: 265/720)

2. Find antallet af måder bogstaverne A, D, E, G, J, U kan arrangeres i en række på, så ordene DU og JEG ikke forekommer. (Løsning: 582)

Derangerproblemet

n	d(n)	n!/e
1	0	0,367879441
2	1	0,735758882
3	2	2,207276647
4	9	8,829106588
5	44	44,14553294
6	265	264,8731976
7	1854	1854,112384
8	14833	14832,89907
9	133496	133496,0916
10	1334961	1334960,916
11	14684570	14684570,08
12	176214841	176214840,9
13	2290792932	2290792932
14	32071101049	32071101049
15	4,81067E+11	4,81067E+11
16	7,69706E+12	7,69706E+12
17	1,3085E+14	1,3085E+14
18	2,3553E+15	2,3553E+15
19	4,47507E+16	4,47507E+16
20	8,95015E+17	8,95015E+17

$$d_n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}) = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

Rekursionsformel for d_n

$d_1 = 0$

$d_2 = 1$

$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$, $n>2$

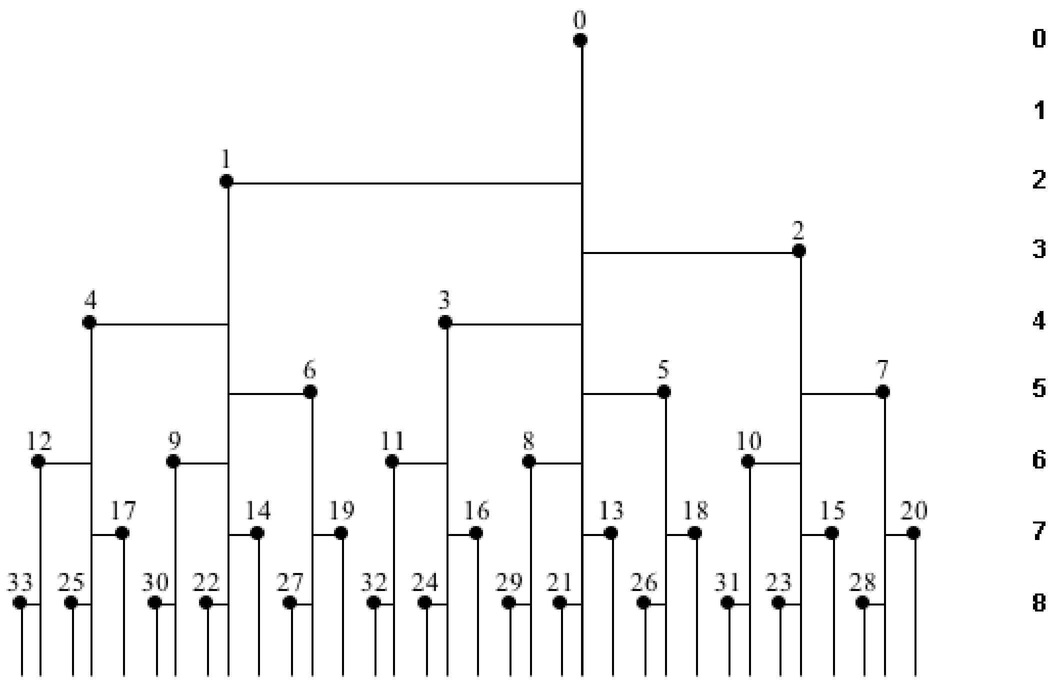
Approximation til d_n

$d_n = n!/e$

idet

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Fibonacci-Tallene



Leonardo Fibonacci
1170 - 1250

$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Fibonacci-Tallene

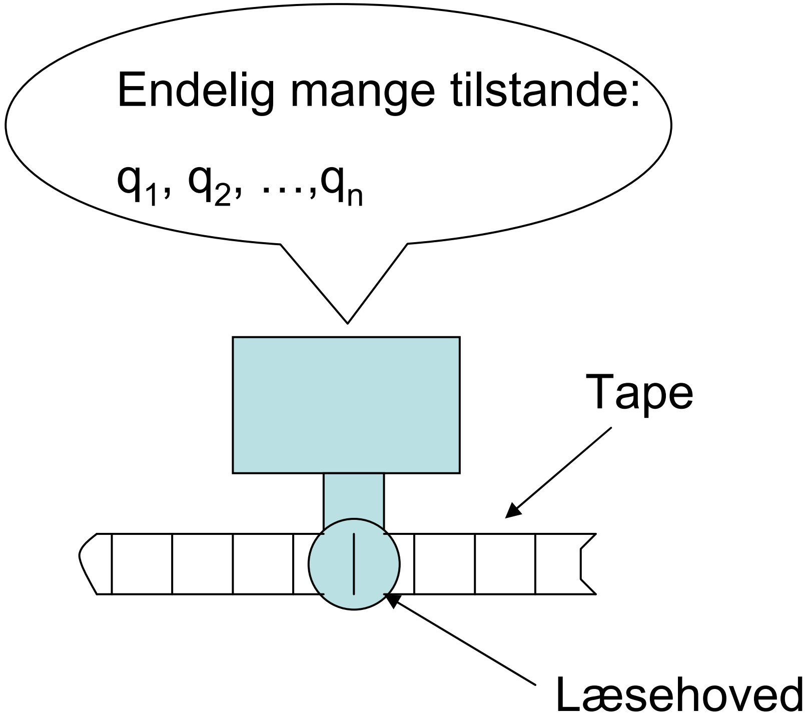
F_n	$F_1+\ldots+F_{n-2}$
1	
1	
2	
3	2
5	4
8	7
13	12
21	20
34	33
55	54
89	88
144	143
233	232
377	376
610	609
987	986
1597	1596
2584	2583
4181	4180
6765	6764

$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \ n>2$

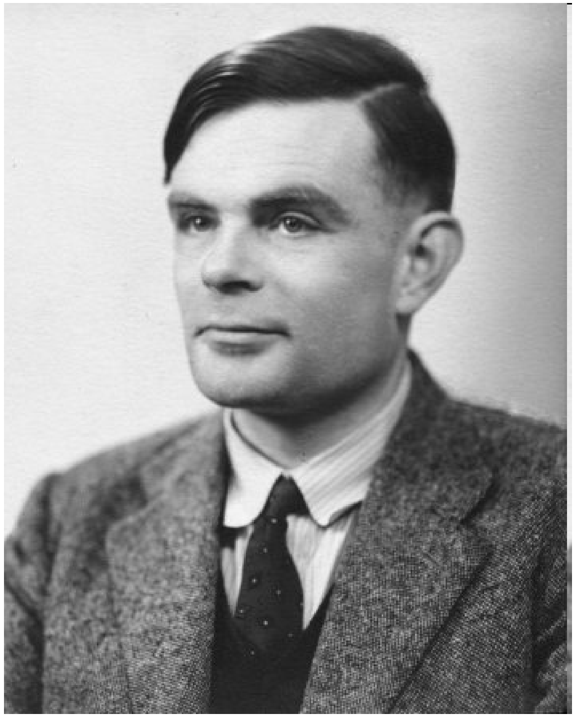
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$F_{n+2} = F_1+F_2+\ldots+F_n+1$

Turing-Maskine



Operation: $s_i q_j q_l s_k$



Alan Turing

1912 - 1954

Kodning af Turing-maskiner og symbolsystemer

Alfabetet $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ kodes således

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & & a_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ 1 & 2 & & n \end{pmatrix}$$

Koden af symbolet a_k betegnes $g(a_k)$.

En symbolstreng $a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots a_{km}$ kodes således

$$g(a_{k1}a_{k2}\cdots a_{km}) = 2^{g(a_{k1})}3^{g(a_{k2})}\ldots p_m^{g(a_{km})}$$

En Turing-maskine med alfabet B,0,1,q1,…,qn giver koderne

$$\begin{pmatrix} B & 0 & 1 & q1 & & qn \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & n+3 \end{pmatrix}$$

$$g(1q2q3B) = 2^{g(1)} \cdot 3^{g(q2)} 5^{g(q3)} 7^{g(B)}$$ = 212625000

Rekursive Funktioner

A. Klassen af Primitive rekursive funktioner

Nul-funktionen: $z(x)=0$,for all x

Efterfølgerfunktionen: $s(x)=x+1$,for all x

Projektioner: $\pi_{i,n}(x_1,\ldots x_n)=x_i$, for all x_i, $1\leq i\leq n$.

Komposition: $f(x_1,\ldots,x_n)=g(h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots, h_m(x_1,\ldots,x_n))$,for alle $g,h_1,\ldots,h_m$

Primitiv Rekursion: $f(x,0)=g(x)$,for given g
$f(x,s(y))=h(x,y,f(x,y))$,for given h

B. Klassen af parielt rekursive funktioner

Minimization: $h(x_1,\ldots,x_n)=y$, hvis $f(x_1, \ldots,x_n,y)=0$ og
$\forall\, t<y(f(x_1, \ldots,x_n,t)$ er defineret og positiv)
= udefineret i andre tilfælde.

Ackermanns funktion

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{if } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{if } m > 0 \text{ and } n = 0 \\ A(m-1, A(m,n-1)) & \text{if } m > 0 \text{ and } n > 0. \end{cases}$$

Values of *A*(*m*, *n*)

m\n	0	1	2	3	4	n
0	1	2	3	4	5	$n+1$
1	2	3	4	5	6	$n+2=2+(n+3)-3$
2	3	5	7	9	11	$2n+3=2\cdot(n+3)-3$
3	5	13	29	61	125	$2^{(n+3)}-3$
4	13	65533	$2^{65536}-3$	$2^{2^{65536}}-3$	$2^{2^{2^{65536}}}-3$	$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n+3}-3$

Church-Turings Tese

Der finder mange forskellige forsøg på at karakterisere klassen af algoritmer: Turing-maskiner, Churchs λ-kalkyle, Post-algoritmer, Markov-algoritmer, Kleenes partielt rekursive funktioner, klassen af algoritmer, som kan defineres i et fornuftigt programmeringssprog som f.eks. Pascal eller C, osv . Det kan ved simple kombinatoriske metoder (igen algoritmiske) vises, at alle disse karakteriseringer giver samme klasse af algoritmer. Church-Turings tese siger derfor, at denne fælles klasse netop udgør klassen af algoritmer.

Church-Turings tese er ikke en matematisk sætning, men antages den, har vi en model af klassen af alle algoritmer.

Klassen af algoritmer kan nummereres

Enhver algoritme er defineret ved en endelig tekst (dens program, som f.eks. kan være en endelig følge af Turingmaskine instruktioner $s_i q_j q_l s_k$, $s_m q_n q_r s_t$,…). Disse tekster han nummereres på en effektiv måde, så man ud fra et nummer kan identificere algoritmen, og omvendt ud fra en algoritme man identificere dens nummer. En sådan nummerering kaldes en **Gödel-nummerering**.

P_x er algoritmen med Gödel-nummer x. Den partielle funktion, som P_x beregner, betegnes φ_x. φ_x kaldes **partielt rekursiv, algoritmisk eller effektivt beregnelig**.

Der findes højst nummerabelt (tælleligt uendeligt) mange effektivt beregnelige funktioner.

Klassen af alle funktioner på de naturlige tal er ikke nummerabel, men har en højere grad af uendelighed.

Der findes funktioner, som ikke er effektivt beregnelige.

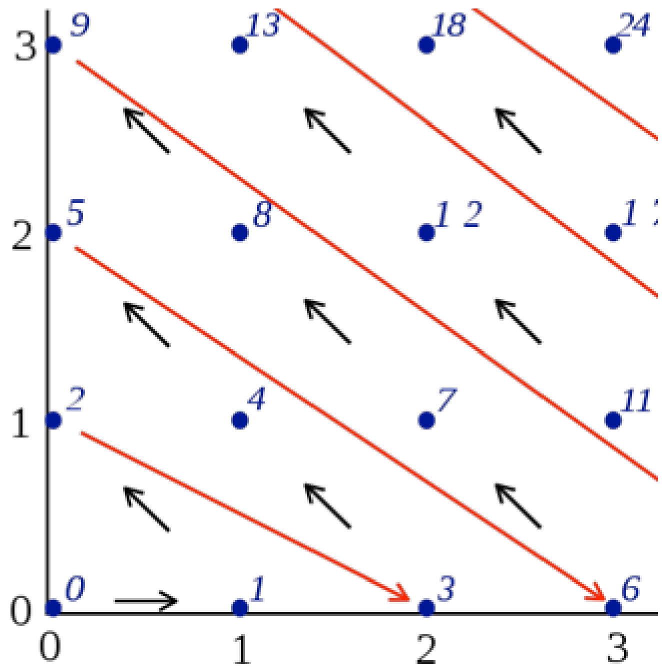
Ikke alle algoritmer kan være totale

$$
\begin{array}{lllll}
 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\
P_1 & P_1(1) & P_1(2) & P_1(3) & \cdots \\
P_2 & P_2(1) & P_2(2) & P_2(3) & \cdots \\
P_3 & P_3(1) & P_3(2) & P_3(3) & \cdots \\
\vdots & & & & \\
P_n & P_n(1) & P_n(2) & P_n(3) & \cdots\cdots P_n(n) \cdots \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

$P(m) = P_m(m)+1$

P er klart en algoritme. Den må derfor forekomme I skemaet som en P_k. Men så får vi $P_k(k) = P(k) = P_k(k)+1$. P_k er derfor ikke defineret for værdien k.

Cantor's paring function



$$\pi(k_1, k_2) := \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(k_1 + k_2 + 1) + k_2.$$

Vi skriver $<k_1,k_2>$ for $\pi(k_1,k_2)$

Den Universelle Algoritme

$$\begin{array}{lllll}
 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\
P_1 & P_1(1) & P_1(2) & P_1(3) & \cdots \\
P_2 & P_2(1) & P_2(2) & P_2(3) & \cdots \\
P_3 & P_3(1) & P_3(2) & P_3(3) & \cdots \\
\vdots & & & & \\
P_n & P_n(1) & P_n(2) & P_n(3) & \cdots\cdots P_n(n)\cdots \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

U(x) = P_a(b), hvor x=<a,b>

U(x) dekoder x som et par <a,b> og lader algoritmen P_a virke på b.

Afgørlige mængder af tal

En mængde af naturlige tal A er rekursivt afgørlig, såfremt der findes en algoritme P med egenskaben

P(x)=1 hvis x tilhører A

P(x)=0 hvis x ikke tilhører A

En mængde A er rekursivt afgørlig, hvis der findes to algoritmer P_1 og P_2, hvor P_1 nummererer A, og P_2 nummererer komplementet til A, dvs. N\A.

Der findes mængder, som er ikke rekursivt afgørlige (dvs. rekursivt uafgørlige).