Gentzen og de transfinitte bevismetoder

Klaus Frovin Jørgensen

Afdeling for Filosofi og Videnskabsteori, RUC

Den 15. november 2011

Konsistensbeviser og grundlagskrisen

Grundlagskrisen opstod på grund af en lang række uafklarede forhold inden for matematikken:

- Konsistensen af de reelle tal
- Kontinuumshypotesen
- Den finere detaljer i mængdelæren, jf. den naive mængdelære
- De forskellige paradokser
- Den aksiomatiske metode medførte meget abstrakt matematik
- osv.

Kort sagt: Kunne man nu være sikker på, at indførelsen af *ideale elementer* altid gik godt?

Hilberts program

Den aksiomatiske metode har flere funktioner. En meget vigtig er at give en garanti for rimeligheden af indførte ideale elementer.

Program (David Hilbert):

- Angiv *formelle* systemer, som modsvarer matematiske teorier indeholdende ideale elementer.
- Vis, at *repræsentationen* er korrekt.
- Bevis konsistens af de formelle systemer ved brug af helt elementære metoder fra matematikkens endelige kerne.

Gödel, Gentzen og konsistensbeviser

Gödel viste, at PA – forståets som formaliseringen af den elementære talteori – godt kunne 'forstå' sin egen konsistens. Men konsistensen kunne ikke bevises internt i PA.

Men Gödel mener ikke, at dette nødvendigvis er dødsstedet til Hilberts program:

"it is conceivable that there exist finitary proofs that cannot be expressed in the formalism of P." (Gödel, 1931; p. 195)

Gerhard Gentzen (1909-1945)

På trods af Gödels ufuldstændigheds-sætninger beviste Gentzen – elev af Bernays og assistent til Hilbert – konsistensen af PA i 1936.

De konstruktive ordinaltal

Vi definerer de konstruktive ordinaltal til at være de objekter, der opnås ved følgende rekursion:

1. 0 er et ordinaltal.
2. Givet ordinaltallene $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, da er ω^μ og $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$ ordinaltal.

Sætter vi ω^0 til at være lig 1, og $1 + 1$ til at være 2, osv. ser vi, at de naturlige tal er indeholdt i de konstruktive ordinaltal. Følgen hedder da $0, \omega^0, \omega^0 + \omega^0, \ldots$ svarende til de naturlige tal.

Vi kan forstå $\omega = \omega^1$ som værende limes-tallet for følgen af naturlige tal.

Vi kan definere en ordning og regneoperationer på alle disse tal.

Mere avancerede regneoperationer og tal

Potensregneregler for ordinaltal:

i) $\alpha^0 = 1$

ii) $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$.

iii) $\alpha^\kappa = \sup_{\lambda<\kappa} \alpha^\lambda$, hvor κ er limes-tal.

Forskellige versioner af det første **epsilon-tal**:

1. ε_0 er det mindste fix-punkt til funktionen $f_\omega(x) = \omega^x$.
2. $\varepsilon_0 = \left.\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right\} \ \omega \text{ gange.}$
3. $\varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \omega^{\omega^{\omega^{\omega^\omega}}}, \dots\}$

Den elementære talteori

Den elementære talteori er det matematiske studie af de naturlige tal, funktioner herpå og ligningssystemer imellem naturlige tal.

Sætningen om entydig primtalsfaktorisering er et godt eksempel på en sætning fra talteorien.

Studiet af diofantiske ligninger er et andet vigtigt område af talteorien. Eksempler:

$$ax + by = 1$$

$$x^n + y^n = z^n$$

Peano-aritemetikken er den formelle udgave af den elementære talteori

Aksiomer for Peano-aritmetik

Teorien formuleret i førsteordenssproget med symbolerne $0, S, +, \cdot$ vil vi kalde for PA. Den baserer sig på aksiomerne for den klassiske førsteordenslogik samt følgende aksiomer:

1. $\forall x(0 \neq Sx)$.
2. $\forall x \forall y((Sx = Sy) \rightarrow (x = y))$.
3. $\forall x(x + 0 = x)$.
4. $\forall x \forall y(x + Sy = S(x + y))$.
5. $\forall x(x \cdot 0 = 0)$.
6. $\forall x \forall y(x \cdot Sy = (x \cdot y) + x)$.
7. *For enhver formel $A(x)$ gælder*

$$A(0) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(Sx)) \rightarrow \forall x A(x).$$

Tænk på PA, som primitiv rekursiv aritmetik med kvantorer

Mod Gentzens konsistensbevis

$$
\dfrac{\dfrac{\neg B \quad \neg B \to (\neg A \to \neg B)}{\neg A \to \neg B} \qquad \dfrac{\dfrac{B \quad B \to (\neg A \to B)}{\neg A \to B} \qquad (\neg A \to B) \to \Big((\neg A \to \neg B) \to A\Big)}{(\neg A \to \neg B) \to A}}{A}
$$

Altså, en inkonsistent teori beviser en hvilken som helst formel.
Det vil sige:

$$B, \neg B \text{ beviser } A.$$

Gentzens konsistensbevis

Sætning. PA er konsistent.

Bevis-skitse. Antag, PA er inkonsistent. Heraf følger, at PA beviser formlen $0 = 1$, kald dette bevis B_1. Når B_1 beviser $0 = 1$, så benyttes en specifik slutningsregel kaldet 'snit' (en generalisation af modus ponens) et sted i beviset. Denne brug af 'snit' kan flyttes 'længere op' i et modificeret bevis – kald dette B_2 – som stadigvæk er et bevis af $0 = 1$. Lav nu en *ordinaltalstildeling* til beviser i PA. Det følger af denne tildeling, at ordinaltallet til B_1 er større end ordinaltallet til B_2.

Imidlertid gælder der, at vi kan modificere B_2, således at et nyt bevis, B_3, af $0 = 1$ opstår. Ordinaltallet her er igen lavere.

Denne procedure kan fortsættes i det uendelige.

Dette er imidlertid i modstrid med, at ordinaltallene mindre end ε_0 er *velordnede*. Der kan med andre ord ikke findes en uendelig nedadstigende kæde af ordinaltal mindre end ε_0.

Følger af Gentzens bevis

Af Gentzens bevis *og* Gödels ufuldstændighedsbevis følger der, at der er et element af konsistensbeviset, som ikke kan formaliseres i PA. Det viser sig, at det netop er velordningen af ordinaltallene mindre end ε_0, som ikke kan formaliseres i PA.

Denne velordning er – hverken mere eller mindre – det, som skal til for at bevise konsistensen af PA. Derfor siger man også, at vi 'måler' PA ved ordinaltallet ε_0

Mod et andet konsistensbevis af PA:

Gödels Dialectica fortolkning

og den moderne bevisteori

Klassisk logik og fuldstændighed

Gödel viste i 1930 at klassisk logik havde en rigtig tilfredsstilende semantik, der baserede sig på at give formler mening i forhold til *to og kun to* sandhedsværdier "sand" og "falsk".

I forhold til denne semantik var der ækvivalens mellem bevisbarhed og sandhed, hvilket udtrykt på formler er:

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B \quad \Leftrightarrow \quad A_1, \ldots, A_n \models B$$

Men hvad med intuitionistisk logik?

Heytings uformelle forståelse af symbolernes betydning

($\wedge$) $p : A \wedge B$ hviss p er et par (p_0, p_1) sådan at $p_0 : A$ og $p_1 : B$.

($\vee$) $p : A \vee B$ hviss p er et par (p_0, p_1), $p_0 \in \{0, 1\}$ og $p_1 : A$ hvis $p_0 = 0$ og $p_1 : B$ hvis $p_0 = 1$.

($\rightarrow$) $p : A \rightarrow B$ iff p er en konstruktion, som tager en hvilken som helst q sådan at $q : A$ over i $p(q)$, hvor $p(q) : B$.

($\neg$) $p : \neg A$ hviss p er en konstruktion der tager en hvilken som helst q, hvor $q : A$ over i $p(q)$, sådan at $p(q) : \perp$.

($\forall$) $p : \forall x A(x)$ hviss p er en konstruktion, der tager enhver t fra domænet ind i $p(t)$ sådan at $p(t) : A(t)$.

($\exists$) $p : \exists x A(x)$ hviss p er et par (p_0, p_1), hvor p_0 er et objekt fra domænet, og hvor $p_1 : A(p_0)$.

Intuitionistisk (minimal) udsagnslogik

$$A \to A, \qquad \bot \to A,$$

$$A \to A \vee B, \qquad B \to A \vee B,$$

$$A \wedge B \to A, \qquad A \wedge B \to B,$$

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \qquad \frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C} \qquad \frac{A \to B \quad A \to C}{A \to B \wedge C}$$

$$\frac{A \wedge B \to C}{A \to (B \to C)} \qquad \frac{A \to (B \to C)}{A \wedge B \to C} \qquad \frac{A \to C \quad B \to C}{A \vee B \to C}$$

Forholdet mellem intuitionistisk logik og klassisk logik

Syntaktisk kan man forstå klassisk logik som intuitionistisk logik udvidet med *tertium non datur*. Denne udvidelse er imidlertid ufarlig med hensyn til konsistens:

Sætning (Gödel/Gentzen 1933). Hvis klassisk logik er inkonsistent, så er intuitionistisk logik det også.

Beviset baserer sig på at oversætte fra klassisk logik ind i intuitionistisk logik, sådan at hvis en hvis en modstrid i klassisk logik kan udledes, så kan man også udlede en i intuitionistisk logik.

Hilberts program igen

Vigtig pointe: Så intuitionistisk logik var altså stærkere, end man havde regnet med.

Lad os erstatte den klassiske logik i PA med intuitionistisk logik. Så får vi HA. Hvad skal vi mene om denne teori?

Disjunction Property and Existence Property

Does HA have the following two properties?

- *Existence property:* If $\mathrm{HA} \vdash \exists x A(x)$ then $\mathrm{HA} \vdash A(t)$ for a certain term t.
- *Disjunction property*: If $\mathrm{HA} \vdash A \vee B$, for A, B closed then $\mathrm{HA} \vdash A$ or $\mathrm{HA} \vdash B$.

The System Σ (1/2)

The ground type consits of the natural numbers. There are symbols for zero and successor and variables of all types.
If F is an operation of type $\sigma \to \tau$ this is written as $F^{\sigma\to\tau}$
Operations in T are defined from combinators (which introduce λ-abstraction)

$$\mathrm{K}(x, y) = x \qquad \mathrm{S}(x, y, z) = x(z)(yz)$$

The combinators give us λ-abstraction $\lambda x.t$ for terms t, with the following equality:

$$(\lambda x.t[x])s = t[s].$$

Moreover, we have primitive recursion

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{R}(x, y, 0) & = & x \\ \mathrm{R}(x, y, (z+1)) & = & y(\mathrm{R}(x, y, z),\, z) \end{array}$$

The System Σ (2/3)

Quantifier free induction

$$\frac{A(0) \quad A(x^0) \to A(Sx^0)}{A(x^0)}$$

Substitution:

$$\frac{A(x^\sigma)}{A(t^\sigma)}$$

Soundness of the Dialectica translation

The formulas of HA are translated into formulas of the type theory.

Theorem (Gödel 1941).

$$\text{If } \mathrm{HA} \vdash A, \text{ then } \Sigma \vdash A_D(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{y}),$$

where $\boldsymbol{T}$ is a sequence of terms which can be extracted from a proof of A in HA.

Gödel's Results

In 1941 the following results are mentioned:

1. For a certain quantifier free formula $A(x)$ let $C \equiv \neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$. Then $\mathrm{HA} + C$ is consistent.
2. If HA proves $\exists x A(x)$ then Σ proves the *translated* formula $A_D(t)$, for a term t.
3. $\neg\neg$-translation (1933) together with the new interpretation proves consistency of classical arithmetic relative to T.

The interpretation was ultimately published in *Dialectica* in 1958: "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes".

Weak versus Strong Counterexamples

Gödel produces with his interpretation a *strong* counterexample. $\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ is demonstrably incompatible with classical logic.

Thus it is shown that intuitionistic logic syntactically is a generalisation of classical logic: Intuitionistic logic can be continued with either *tertium non datur* or with $\neg\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$ (but not with both jointly).

Coherence

Gödel's interpretation is paradigmatic with respect to coherence (Σ is now called T):

— PA is interpreted in T
— T is consistent, we can prove strong normalisation, by:
  · Howard's strong computability predicates
    (uses König's lemma)
  · Tait's method of ascribing ordinals $< \varepsilon_0$ to terms of T
— Fits with Gentzen's consistency proof (which again fits
  with Schütte's full cut-elmination)
— Tait's proof of termination fits with Gentzen's characterisation
  of PA as ε_0
— The no-counter-example interpretation can be derived from
  both the Dialectica interpretation and Gentzen's
  cut-elimination