Hilbert om det uendelige og matematikkens grundlag omkring 1925

Klaus Frovin Jørgensen

Matematik: Videnskaben om det uendelige 2 Folkeuniversitetet i København, efteråret 2011

Situationen i 1800-tallets matematik

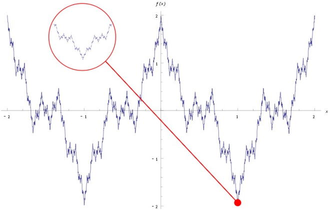
- Indivisibler plagede f.eks. Bolzano, men status af de reelle tal blev dog mere og mere afklaret (Bolzano, Cauchy, Dedekind, Cantor, Weierstrass)
- Imidlertid skulle strukturen af de reelle tal undersøges nærmere
- Geometrien blev undersøgt dybere (Pasch, Hilbert)
- Uendelige ikke-konstruktive metoder skabte resultater (eks. Hilberts basissætning)
- Fraktaler sås som patologiske (Eks. Peanos kurve, Cantor-mængden)
- Den naive mængdelære krævede detaljerede undersøgelser

Et patologisk eksempel

Weierstrass-funktionen (1872). Hvis a er ulige, $b \in [0, 1[$, og hvis $ab > 1 + 3\pi/2$, så er funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x)\pi,$$

kontinuert på hele $\mathbf{R}$ men intetsteds differentiabel.



'Tegnede' kurver er ikke nødvendigvist 'glatte'

Hilberts foredrag i Paris år 1900

Hilbert udpegede 23 centrale uløste problemer i matematikken i foredraget *Matematiske problemer*:

1. Kontinuums hypotesen.
2. Konsistensen af de reelle tal.

$\vdots \qquad \vdots$

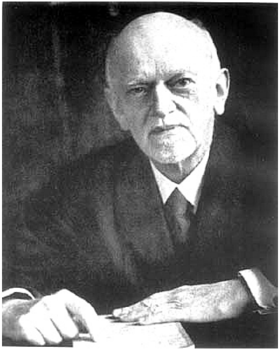
10. Eksistensen af en algoritme som afgører enhver diophantisk ligning.

$\vdots \qquad \vdots$

De klassiske grundlagsskoler

- Logicismen (G. Frege og B. Russell).
- Intuitionismen (L. Brouwer, H. Weyl, A. Heyting).
- Det bevisteoretiske program (D. Hilbert, P. Bernays).

David Hilbert
(23. jan., 1862 – 14. feb., 1943)



Luitzen Egbertus Jan Brouwer
(27. feb., 1881 – 2. dec., 1966)

Brouwers overordnede tese

Matematik er funderet i menneskenes *mentale konstruktioner*.

Matematik er ikke en analytisk aktivitet, hvor dybe egenskaber af en ekstern matematisk virkelighed skal afdækkes. De matematiske metoder skal derimod realisere komplekse mentale konstruktioner.

Transcendente metoder afvises. Og forståelsen af det uendelige bliver central.

Intuitionismen står overfor platonismen

“[I]ngen som har blot indsigt i geometri, vil benægte at denne kundskab efter sit væsen står i direkte modstrid mod de vendinger og talemåder der bruges af geometriens fagmænd.
- Hvorledes?
- Jo, det sprog de fører har et vist komisk skær, men de har nok ikke noget bedre. De taler om at *gøre* dit og dat, som om det var handlingen det kom an på; de taler om at kvadrere og trække paralleler og tilføje og hvad det nu er for ord de slår om sig med; men i virkeligheden er det et fag der må drives udelukkende for erkendelsens skyld. [Altså om] det evigt værende, ikke det som bliver til og går til grunde.” (Staten 527a-b)

Eksempel 1/2

Sætning. Der eksisterer irrationelle tal a og b, sådan at a^b er rationelt.
Bevis. Se i udgangspunktet på $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Der er *kun* to muligheder:

1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ er irrationelt. Der gælder følgende

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2.$$

Sæt derfor $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ og $b = \sqrt{2}$.
2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ er rationelt. Sæt $a = \sqrt{2} = b$.

Eksempel 2/2

Sætning. $e - \pi$ er irrationel eller $e + \pi$ er irrational.

Bevis. Antag, at både $e - \pi$ og $e + \pi$ er rationelle. Det vil sige, der eksisterer hele tal m og n og m' og n', sådan at

$$e - \pi = \frac{m}{n} \qquad \text{og} \qquad e + \pi = \frac{m'}{n'}$$

Men da summen af to rationelle tal er et rationelt tal, får vi en modstrid. I vores tilfælde:

$$\frac{mn' + nm'}{nn'} = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = (e - \pi) + (e + \pi) = 2e$$

Michael Dummett (anno 1973): Sproglig mening kan ikke basere sig på transcendente sandhedsbetingelser

Dummetts sprogfilosofiske basis

- **Mening**. Sprog beskæftiger sig med kommunikation, og mening er bestemt af *brug*.
- **Forståelse** er viden om mening og består i evnen til at redegøre for reglerne, der bestemmer brugen af symbolerne.
- **Manifestation**. Ingen forståelse transcenderer manifestation.

Dummetts rekonstruktion af Brouwers argument

- *Antag* at mening baserer sig på sandhedsbetingelser.
- På grundlag heraf kan vi vise, at der eksisterer udsagn, hvis mening vi ikke kan genkende.
- Spørgsmål: Er alle reelle tal lig 0 eller ikke lig 0?

Platonismens problemer

"To suppose that there is an ingredient of meaning which transcends the use that is made of that which carries the meaning is to suppose that someone might have learned all that is directly taught when the language of a mathematical theory is taught to him, and might then behave in every way like someone who understood that language, and yet not actually understand it, or understand it only incorrectly. But to suppose this is to make meaning ineffable, that is, in principal incommunicable. If this is possible, then no one individual ever has a guarantee that he is understood by any other individual" (Dummett, 1973, p. 217-8)

Så hvad er dybest Brouwers kritik af eksemplerne?

Sætning. Der eksisterer irrationelle tal a og b, sådan at a^b er rationelt.

Sætning. $e - \pi$ irrationel eller $e + \pi$ er irrational.

Intuitionismens konklusioner

Betingelser for verifikation – og dermed konstruktioner – er centrale begreber.

Heraf følger en forkastelse af tertium non datur:

$$A \vee \neg A$$

og samt en revision af uendelighedsbegrebet.

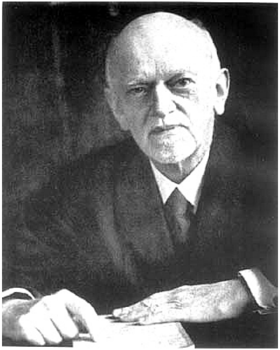
Brouwers reviderede matematik er grundlæggende forskellig fra den klassiske matematik: Alle funktioner er f.eks. kontinuerte, og kontinuumet kan ikke deles i to.

David Hilbert og det uendelige

"Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das *Gemüt* der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere *Idee* auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer *Begriff* so der *Aufklärung* bedürftig."

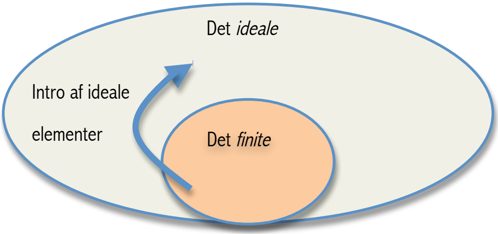
(Hilbert, "Über das Unendliche", 1926, p. 163)

David Hilbert
(23. jan., 1862 – 14. feb., 1943)



Essensen af Hilberts standpunkt

- Matematikken besidder en endelig (*finit*) kerne. Denne accepteres som filosofisk uproblematisk.
- I matematikken introduceres nye *ideale* objekter, som overskrider det endelige. Denne del af matematikkens metode er *progressiv*. Leder til opdagelser og generaliserede begreber.



- Nye objekter må 'kontrolleres' – den *regressive* del af matematikkens metode (her kommer Hilberts program ind i billedet).

Hilberts finite grundlag

Den finite kerne karakteriseres ikke entydigt af Hilbert, men den indeholder noget i retningen af:

- Simpel matematik om simple geometriske figurer
- Simpel talteori
- Funtioner over de rationelle tal

Hilbert om det ideale (1/2)

The role that remains to the infinite is, rather, merely that of an idea—if, in accordance with Kant's words, we understand by an idea a concept of reason that transcends all experience and through which the concrete is completed so as to form a totality–an idea [. . .] (Hilbert, 1926, p. 392)

Hilbert om det ideale (2/2)

Ideale elementer har grundlæggende til opgave at:

- Systematisere
- Generalisere
- Skabe sammenhæng
- Fuldstændiggøre og afslutte

Men de spiller også en central rolle i forbindelse med:

- Opdagelser
- Forklaringer

Eksempler på ideale elementer

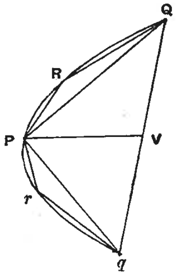
Forskellige eksempler (ikke nødvendigvis Hilberts egne eksempler) fra matematikken på ideale elementer kunne være:

1. Indivisibler
2. Reelle og komplekse tal
3. Klassisk logik (det vil sige "tertium non datur")
4. Projektiv geometri, som fuldstændiggørelsen af euklidisk geometri
5. Udvalgsaksiomet
6. Frembringende funktioner

Eksempel 1: Archimedes og parablens kvadratur

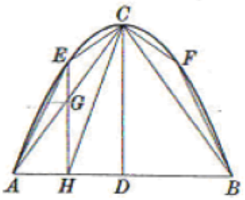
Skriftet om "Parablens kvadratrur" ender med følgende sætning:

Proposition 24. Every segment bounded by a parabola and a chord Qq is equal to four-thirds of the triangle which has the same base as the segment and equal height.



Bevis af Sætning 24

Dan $\triangle ABC$ og del den i de rette $\triangle ADC$ og $\triangle BDC$. Kald midten af AD for H og konstruér midtnormalen HE.



Keglesnitslæren siger $EG = {}^1\!/\!_2 GH$. Dette medfører

$$\triangle AEG : \triangle AGH = 1 : 2$$

$$\triangle GEC : \triangle HGC = 1 : 2$$

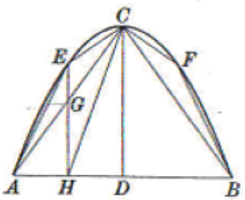
Dette giver:

$$\triangle AEC = \frac{1}{2} \triangle AHC = \frac{1}{8} \triangle ABC$$

Bevis af Sætning 24

Af symmetri-grunde får vi:

$$\triangle AEC + \triangle BFC = \frac{1}{4}\triangle ABC.$$



Hvis vi følger den halvering af korden, får vi:

$$\triangle ABC, \frac{1}{4}\triangle ABC, \frac{1}{4^2}\triangle ABC, \ldots$$

Lad Σ betegne de efterspurgte areal, og lad S_n være den n-te sum. Vi har så:

$$S_n = \triangle ABC + \frac{1}{4}\triangle ABC + \cdots + \frac{1}{4^n}\triangle ABC < \Sigma.$$

Bevis af Sætning 24

Archimedes 'gætter': Sæt K til at være $\frac{4}{3} \triangle ABC$. Der gælder nu:

$$K < \Sigma \text{ eller } K = \Sigma \text{ eller } K > \Sigma.$$

At K er arealet vises ved et såkaldt dobbelt-modstrids-bevis.

Bevis af Sætning 24

Antag $\Sigma < K$. Vælg en følge S_n, sådan at det sidste led X i følgen er mindre end forskellem mellem K og Σ, dvs:

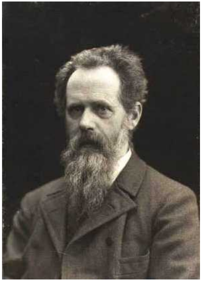
$$K - \Sigma > X$$

Fra lemmaet har vi, at

$$K = \frac{4}{3} \triangle ABC = \triangle ABC + \frac{1}{4} \triangle ABC + \cdots + X + \frac{1}{3} X.$$

Men herved bliver $\triangle ABC + \frac{1}{4} \triangle ABC + \cdots + X$ større end Σ, hvilket er en umulighed, da afsnitssummen altid ligger indenfor parablen.

Ligeledes giver antagelsen om $K < \Sigma$ en modstrid.



Archimedes: Metoden

Fundet af den danske filolog J.L. Heiberg i 1906

Fra forordet

"Archimedes to Erastosthenes greeting.

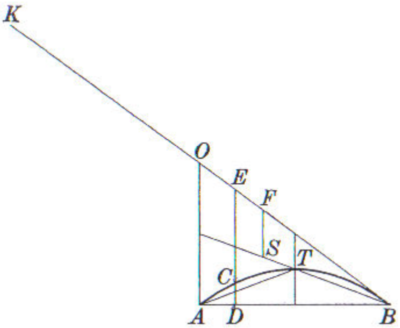
I sent you on a former occasion some of the theorems discovered by me, merely writing out the enunciations and inviting you to discover the proofs, which at the moment I did not give. The enunciations of the theorems which I sent were as follows"

Metoden var karakteriseret ved:

1. Brug af et vægtstangsprincip, så arealer kan 'vejes'
2. Arealet af en figur forstås som (samlingen) af alle parallelle linjestykker

Beviset fra *Metoden*

Konstruér tangenten til B og forlæng til K, sådan at O bliver midtpunkt til BK ($OK = OB$). Konstruér DE parrallel til AO.



Fra keglesnitslæren har vi:

$$CD : ED = AD : AB$$

$$CD : ED = OE : OB$$

Dette medfører:

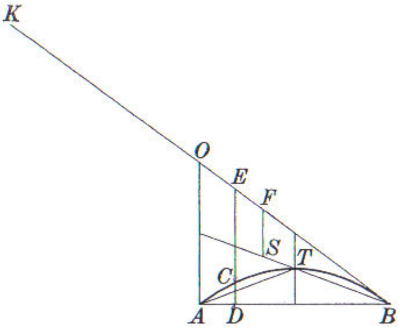
$$CD : ED = OE : OK$$

'Hæng' nu CD ud på K. Ved vægtstangsprincippet er CD nu i ligevægt med ED (ophængt i E).

Beviset fra *Metoden*

Gør nu det samme for alle ordinaterne, hvorved parablens 'stykker' (ophængt i K) balancerer med $\triangle BOA$.

S er ligvægtspunktet for $\triangle BOA$ (medianernes skæringspunkt).



Derved kan vi forstå $\triangle BOA$ som ophængt i F. Vi konstaterer nu, at $OK = 3OF$, hvorved vi får:

$$\Sigma = \frac{1}{3} \triangle BOA = \frac{4}{3} \triangle ATB.$$

Eksempel 4: Udvalgsaksiomet

Ved aksiomatiseringen af mængdelæren blev Zermelo opmærksom på en essentiel antagelse: *Udvalgsaksiomet*. Dette aksiom gør virkelig 'tingene pæne'. Konsekvenser af aksiomet:

- Enhver mængde kan velordnes.
- Ordning efter kardinalitet er en fuldstændig ordning.
- Ethvert vektorrum har en basis.
- Kontinuitet i x_0 er det samme som følge-kontinuitet i x_0.
- Hahn-Banachs sætning: En lineær funktional, defineret på et delrum af et vektorrum, som er begrænset af en seminorm, kan udvides til en lineær funktional, begrænset af samme seminorm, på hele rummet.
- Zorns lemma.

Men der følger også såkaldte paradokser (eks. Banach-Tarski).

Hilberts matematikfilosofi

Matematikkens metode har to dele:

— En progressiv del: De ideale elementers metode.

— En regressiv del: Den formelle metode; *Hilberts bevisteori*.

Bevisteorien skulle sikre de ideale elementers metode

Den regressive metode

Den aksiomatiske metode har flere funktioner. En meget vigtig er at give en garanti for rimeligheden af indførte ideal-elementer.

Program (David Hilbert):

- Angiv *formelle* systemer, som modsvarer matematiske teorier indeholdende ideal-elementer.
- Vis, at *repræsentationen* er korrekt.
- Bevis konsistens af de formelle systemer ved brug af helt elementære metoder fra matematikkens endelige kerne.

Øvelses-spørgsmål

- Hvad er sammenhængen mellem Hilberts matematikfilosofi og hans program? Kan filosofien leve uden programmet?
- Er Hilbert formalist?


DAVID
HILBERT
WIR MÜSSEN WISSEN
WIR WERDEN WISSEN