Matematik: Videnskaben om det uendelige

Anden forelæsning: Indivisibler

Klaus Frovin Jørgensen

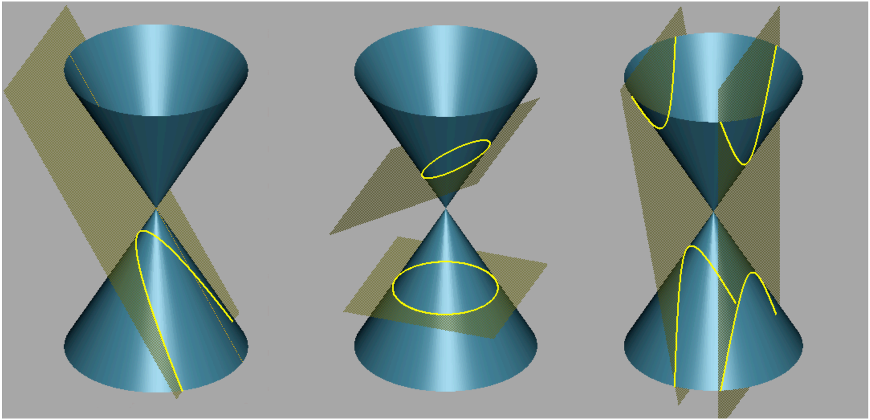
20. september, 2010

Den græske matematik

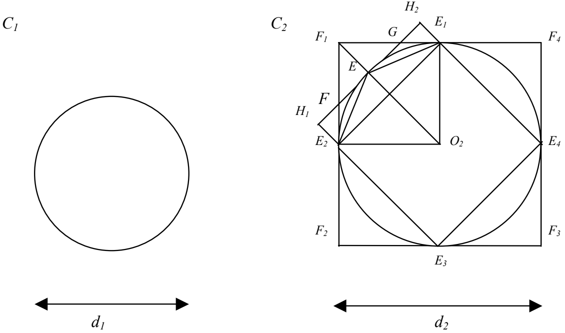
- Endelige geometriske objekter er matematikkens objekter
- Kun det potentielt uendelige accepteres
  - Objekter
  - Processer
- Det fysiske er abstraheret væk i matematikken

Filosofien havde en indflydelse på matematikken!

Keglesnit

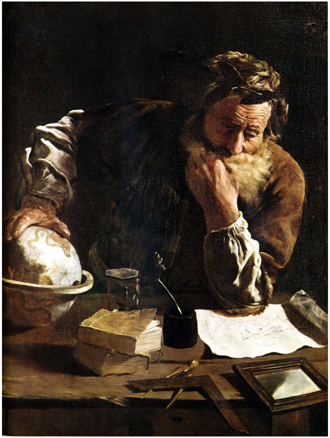


Udtømningsmetoden: En paradigmatisk metode



Det antages, at der findes et areal $B = C_2$, sådan at

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$



THE WORKS OF

Archimedes

EDITED IN MODERN NOTATION

WITH INTRODUCTORY CHAPTERS BY

T. L. Heath

WITH A SUPPLEMENT

The Method of Archimedes

RECENTLY DISCOVERED BY HEIBERG

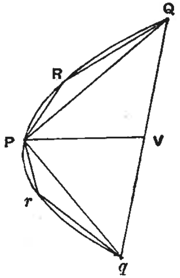
NEW YORK

DOVER PUBLICATIONS, INC.

Archimedes og parablens kvadratur

Skriftet om “Parablens kvadratrur” ender med følgende sætning:

Proposition 24. Every segment bounded by a parabola and a chord Qq is equal to four-thirds of the triangle which has the same base as the segment and equal height.



Vigtigt lemma for beviset af parablens kvadratur

Proposition 23. Given a series of areas $A, B, C, D, \ldots, Z$ of which A is the greatest, and each is equal to four times the next in order, then

$$A + B + C + \ldots + Z + {}^1\!/\!{}_3 Z = {}^4\!/\!{}_3 A.$$

Bevis af Sætning 23

Take areas $b, c, d, \ldots$ such that

$$b = \tfrac{1}{3}B,$$

$$c = \tfrac{1}{3}C,$$

$$d = \tfrac{1}{3}D, \text{ and so on.}$$

Then, since $$b = \tfrac{1}{3}B,$$

and $$B = \tfrac{1}{4}A,$$

$$B + b = \tfrac{1}{3}A.$$

Similarly $$C + c = \tfrac{1}{3}B.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

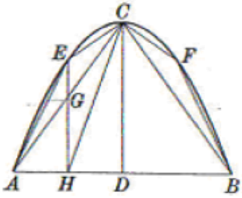
Therefore

$$B + C + D + \ldots + Z + b + c + d + \ldots + z = \tfrac{1}{3}(A + B + C + \ldots + Y).$$

But $$b + c + d + \ldots + y = \tfrac{1}{3}(B + C + D + \ldots + Y).$$

Bevis af Sætning 24

Dan $\triangle ABC$ og del den i de rette $\triangle ADC$ og $\triangle BDC$. Kald midten af AD for H og konstruér midtnormalen HE.



Keglesnitslæren siger $EG = {}^1\!/_2 GH$. Dette medfører

$$\triangle AEG : \triangle AGH = 1 : 2$$

$$\triangle GEC : \triangle HGC = 1 : 2$$

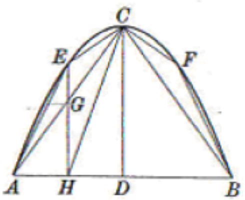
Dette giver:

$$\triangle AEC = \frac{1}{2} \triangle AHC = \frac{1}{8} \triangle ABC$$

Bevis af Sætning 24

Af symmetri-grunde får vi:

$$\triangle AEC + \triangle BFC = \frac{1}{4}\triangle ABC.$$



Hvis vi følger den halvering af korden, får vi:

$$\triangle ABC, \frac{1}{4}\triangle ABC, \frac{1}{4^2}\triangle ABC, \ldots$$

Lad Σ betegne de efterspurgte areal, og lad S_n være den n-te sum. Vi har så:

$$S_n = \triangle ABC + \frac{1}{4}\triangle ABC + \cdots + \frac{1}{4^n}\triangle ABC < \Sigma.$$

Bevis af Sætning 24

Archimedes 'gætter': Sæt K til at være $\frac{4}{3} \bigtriangleup ABC$. Der gælder nu:

$$K < \Sigma \text{ eller } K = \Sigma \text{ eller } K > \Sigma.$$

At K er arealet vises ved et såkaldt dobbelt-modstrids-bevis.

Bevis af Sætning 24

Antag $\Sigma < K$. Vælg en følge S_n, sådan at det sidste led X i følgen er mindre end forskellem mellem K og Σ, dvs:

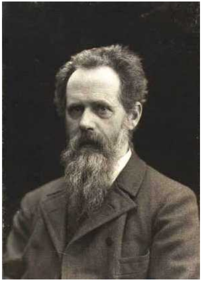
$$K - \Sigma > X$$

Fra lemmaet har vi, at

$$K = \frac{4}{3} \triangle ABC = \triangle ABC + \frac{1}{4} \triangle ABC + \cdots + X + \frac{1}{3} X.$$

Men herved bliver $\triangle ABC + \frac{1}{4} \triangle ABC + \cdots + X$ større end Σ, hvilket er en umulighed, da afsnitssummen altid ligger indenfor parablen.

Ligeledes giver antagelsen om $K < \Sigma$ en modstrid.



Archimedes: Metoden

Fundet af den danske filolog J.L. Heiberg i 1906

Fra forordet

“Archimedes to Erastosthenes greeting.

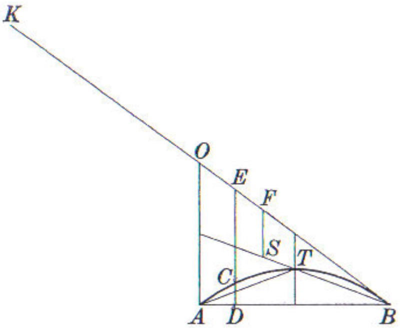
I sent you on a former occasion some of the theorems discovered by me, merely writing out the enunciations and inviting you to discover the proofs, which at the moment I did not give. The enunciations of the theorems which I sent were as follows”

Metoden var karakteriseret ved:

1. Brug af et vægtstangsprincip, så arealer kan 'vejes'
2. Arealet af en figur forstås som (samlingen) af alle parallelle linjestykker

Beviset fra *Metoden*

Konstruér tangenten til B og forlæng til K, sådan at O bliver midtpunkt til BK ($OK = OB$). Konstruér DE parrallel til AO.



Fra keglesnitslæren har vi:

$$CD : ED = AD : AB$$

$$CD : ED = OE : OB$$

Dette medfører:

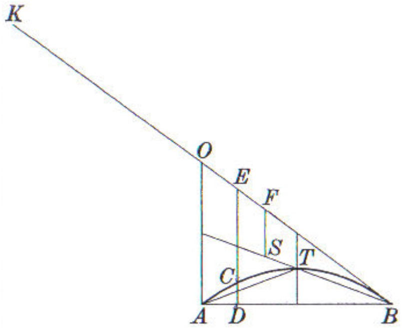
$$CD : ED = OE : OK$$

'Hæng' nu CD ud på K. Ved vægtstangsprincippet er CD nu i ligevægt med ED (ophængt i E).

Beviset fra *Metoden*

Gør nu det samme for alle ordinaterne, hvorved parablens 'stykker' (ophængt i K) balancerer med $\triangle BOA$.

S er ligvægtspunktet for $\triangle BOA$ (medianernes skæringspunkt).



Derved kan vi forstå $\triangle BOA$ som ophængt i F. Vi konstaterer nu, at $OK = 3OF$, hvorved vi får:

$$\Sigma = \frac{1}{3} \triangle BOA = \frac{4}{3} \triangle ATB.$$

Metoden passer ikke til det græske paradigme

Archimedes' metode er i konflikt med både Platon og Aristoteles:

- Vægtstangsprincippet er mekanisk (ikke-geometrisk)
- Der findes uendeligt mange linjer — kan vi manipulere med en sådan samling?

Indivisiblerne er ikke egentligt begrebsliggjort

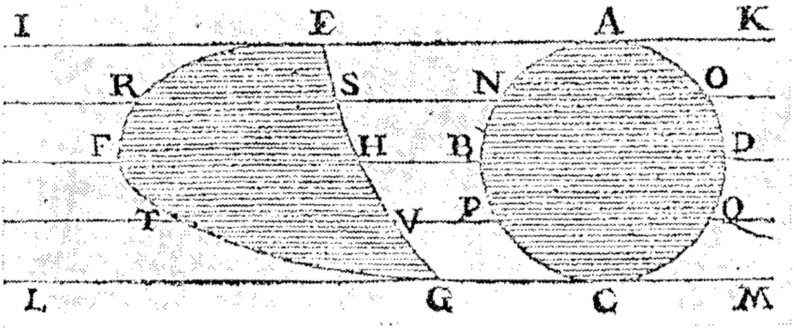
Archimedes skriver i beviset:

"Similarly, for all other straight lines parallel to DE and meeting the arc of the parabola"

Bonaventura Cavalieri (1598–1647)

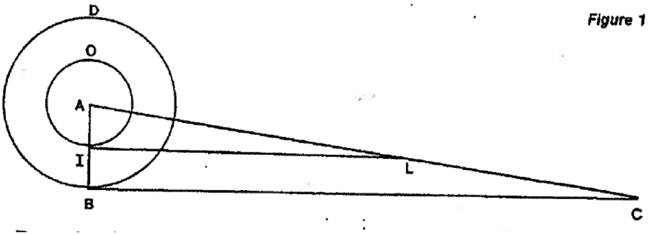
Cavalieris princip:

"If between the same parallels any two plane figures are constructed, and if in them, any straight lines being drawn equidistant from the parallels, the included portions of any one of these lines are equal, the plane figures are also equal to one another"


I
E
A
K
R
S
N
O
F
H
B
D
T
V
P
Q
L
G
C
M

Brug af princippet

Evangelista Torricelli (1608–1647)



Toricellis trompet

En uendelig figur med et endeligt volume men uendelig overflade

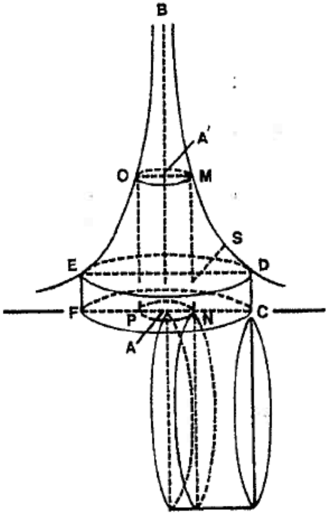


Figure 2

Et brud med det græske paradigme

- Der findes uendelige figurer; det endelige og det uendelige kan sammenlignes
- Uendelige processer kan tænkes færdiggjorte
- Geometri er imidlertid stadig det centrale
- Men endnu ikke nogen generel teori til at finde arealer af figurer