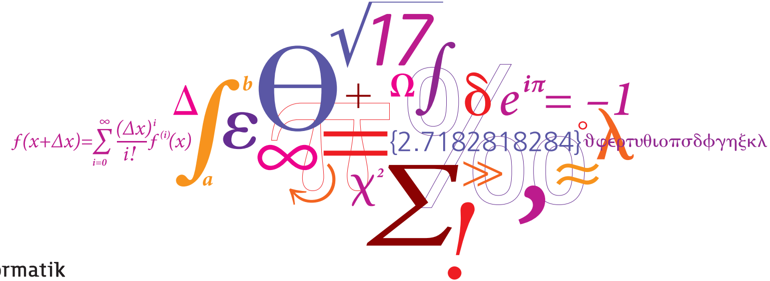
Gödels ufuldstændighedssætninger

Thomas Bolander, DTU Informatik

Matematik: Videnskaben om det uendelige 2
Folkeuniversitetet i København, efteråret 2011



DTU Informatik
Institut for Informatik og Matematisk Modellering

Gödels ufuldstændighedssætning

Ufuldstændighedssætningen:

- Publiceret i 1931 af Kurt Gödel (25 år).
- En af det 20. århundredes mest berømte matematiske sætninger.

Populær formulering:

Der findes sande matematiske sætninger som ikke kan bevises.

Truer **matematikkens grundlag** som netop er sikkerhed gennem bevis.

Revolutionerende: Bruger matematiske metoder til at vise begrænsningen i matematiske metoder.

Den oprindelige formulering

Den populære formulering (*sande sætninger som ikke kan bevises*) er naturligvis for upræcis til at kunne bevises. Hvorfor?

Oprindelig formulering:

> *Zu jeder ω-widerspruchsfreien rekursiven Klasse κ von Formeln gibt es rekursive Klassenzeichen r, so daß weder v Gen r noch Neg(v Gen r) zu Flg(κ) gehört (wobei v die freie Variable aus r ist).*

Denne formulering giver ikke mening for særligt mange mennesker, så lad os prøve at simplificere den lidt...

Simplicerede formuleringer

Simplificeret formulering:

> *I ethvert* **konsistent formelt system** *som indeholder talteori findes udsagn som hverken kan bevises eller modbevises.*

Intuitivt: Systemet kan udtrykke udsagn, som det ikke selv kan afgøre om er sande eller ej.

Repetition: Hvad er et formelt system? Hvad betyder konsistens?

Ufuldstændighed: Et formelt system kaldes ufuldstændigt hvis der findes formler som hverken kan bevises eller modbevises.

Parafrasering:

> *Ethvert konsistent formelt system som indeholder talteori er ufuldstændigt.*

Fortolkninger af ufuldstændighedssætningen

Gödels ufuldstændighedssætning er blevet givet meget **vidtrækkende fortolkninger**, f.eks.:

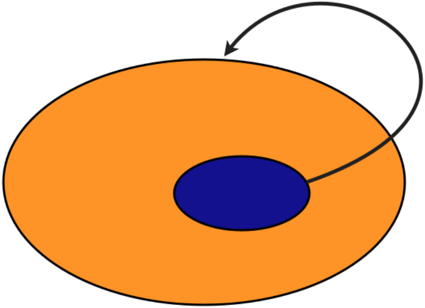
- *Der findes sande matematiske sætninger som ikke kan bevises.*
- *Der er grænser for vores mulighed for erkendelse af sandhed gennem logiske argumenter.*
- *Der er grænser for den rationelle tankegangs rækkevidde.*
- *Mennesker er klogere end maskiner. (John R. Lucas)*
- *Mennesker ved mere end de kan vide, hvorfra de ved. (Tor Nørretranders i Mærk Verden)*

Disse kan ikke være direkte konsekvenser af Gödels sætning. Hvorfor ikke?

Selvreference

Essentiel komponent i Gödels bevis: **selvreference**.

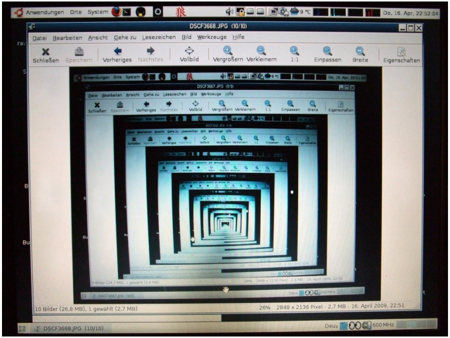
Selvreference: Selvreference bruges om objekter som **refererer til sig selv**. Det sker ved at en **del** af objektet **refererer til** objektet som helhed.



Selvreference

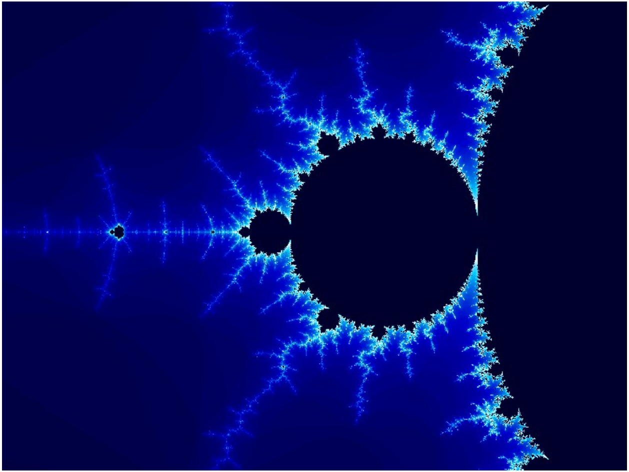
Eksempler på **selvreference**:

- **Sætninger**: "Denne sætning indeholder 5 ord."
- **Definitioner**: "En mængde er en vilkårlig samling af matematiske objekter." (Cantor's mængdebegreb). Hvor er selvreferencen her?
- **Billeder**:



Flere eksempler på selvreference

- **Regler**: "Alle regler har en undtagelse".
- **Fraktaler**:



Mere selvreference

I 1. uge præsenterede vi en række **paradokser**:

- **Russells paradoks** (mængden af mængder som ikke er element i sig selv).
- **Barberens paradoks** (barberen barberer de som ikke barberer sig selv).
- **Pinocchios paradoks** ("min næse vil nu vokse").

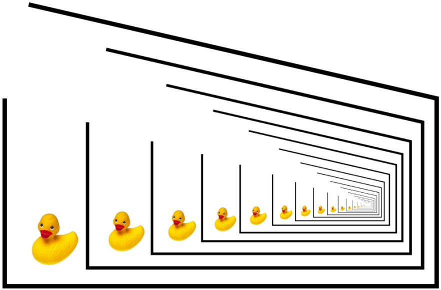
Involverer disse paradokser selvreference? I så fald, hvordan?

Selvreference i Russells paradoks

Definition. Russell-mængden $R =$ mængden af mængder som ikke er element i sig selv.

Definitionen er selvrefererende: R refererer til **alle** mængder, herunder R selv.

En mængde som indeholder sig selv er altid selvrefererende (og har en "uendelig dybde"):



Løgnerparadokset

Løgnerparadokset bygger på **løgnersætningen** L:

L: Denne sætning er falsk.

Spørgsmålet er nu: Er løgnersætningen L sand eller falsk?

Egenskaber: Selvrefererende + paradoksal.

Fra løgnersætning til Gödelformel

Gödels bevis bygger på **Gödelformlen** G som udtrykker:

G: Denne formel kan modbevises.

(Bemærk selvreference & relation til løgnersætning).

Spørgsmålet er nu: Kan formlen G bevises eller ej?

1. G **kan** bevises $\Rightarrow$ G er sand $\Rightarrow$ G kan modbevises.
2. G **kan ikke** bevises $\Rightarrow$ vi kan ikke bevise at G kan modbevises $\Rightarrow$ vi kan ikke modbevise G.

Konklusion. Der må gælde en af følgende:

1. G kan **både** bevises og modbevises.
2. G kan **hverken** bevises eller modbevises.

Altså: Hvis systemet er konsistent (ikke 1), så er det ufuldstændigt (2). Dette er netop formuleringen i **Gödels sætning**!

Fra Gödelformel til ufuldstændighedssætning

Hvad vi har (fra foregående slide):

Ethvert konsistent system som kan udtrykke Gödelformlen er ufuldstændigt.

Hvad vi vil vise (jvf. starten af forelæsning):

Ethvert konsistent formelt system som indeholder talteori er ufuldstændigt.

Hvad vi mangler at vise: Formelt system indeholder talteori $\Rightarrow$ kan udtrykke Gödelformel.

Gödelformel $\Rightarrow$ ufuldstændighed	$+$	talteori $\Rightarrow$ Gödelformel	$=$	talteori $\Rightarrow$ ufuldstændighed

Talteori

Formelt system indeholder talteori hvis:

- Kan udtrykke egenskaber ved de naturlige tal $0, 1, 2, \ldots$.
- Har passende **aksiomer** for de naturlige tal, f.eks. $\forall x(x + 1 \neq 0)$.

Mål: Indenfor sådanne systemer at udtrykke Gödelformlen:

Denne formel kan modbevises.

Udfordring:

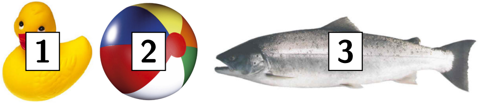
- Formler i talteori "taler om" tal og egenskaber ved tal.
- Vi skal have dem til i stedet at "tale om" formler og egenskaber ved formler (så vi kan danne Gödelformlen).

Antag de eneste objekter du må tale om er tal. Hvordan vil du da tale om objekterne i dette rum?

Gödel-nummerering

Gödel-nummerering: Hver formel φ i det formelle system får et entydig nummer (et “CPR-nummer”). Dette nummer kaldes **Gödelnummeret** af formlen, og betegnes $\langle\varphi\rangle$.

Pointen er: Formelle systemer indeholdende talteori kan da udtrykke egenskaber ved formler via deres Gödelnumre.



$$\mathbf{3} > \mathbf{2} \wedge \mathbf{2} > \mathbf{1}$$

Selvreference i formelle systemer

Vigtigste egenskab ved formler: Er de bevisbare eller ej?

Denne egenskab indfanger Gödel i en formel *bevisbar*(x).

Der gælder:

$$\varphi \text{ kan bevises} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{bevisbar}(\langle\varphi\rangle) \text{ kan bevises.}$$

Intuitivt: Formlen *bevisbar(x)* tillader systemet at "tale om" hvilke formler der er bevisbare **i systemet selv** (via deres Gödelnumre)!

Formlen *bevisbar*(x) er et "alvidende orakel" for systemet.

Hvad er relationen til selvreference?

Gödelformlen

Gödel konstruerer en formel G så følgende er bevisbart:

$$G \Leftrightarrow \mathit{bevisbar}(\langle \neg G \rangle).$$

Her står $\neg G$ for **negationen** af G, dvs. formlen som udtrykker "ikke-G".

Intuitivt: G udtrykker at dens egen negation er bevisbar. Altså: "Denne formel kan modbevises." Dvs. Gödelformlen.

Konklusion: Gödelformlen kan udtrykkes i ethvert system som indeholder talteori.

Opsummering

Gödels ufuldstændighedssætning. *Ethvert konsistent formelt system som udvider talteori er ufuldstændigt.*

Bevisskitse:

- Introducér Gödelnummerering i systemet (via talteori).
- Konstruér formlen *bevisbar*(x) som udtrykker bevisbarhed indenfor systemet selv (via Gödelnumre).
- Konstruér formlen G som udtrykker sin egen modbevisbarhed.
- Der må nu gælde en af følgende:
  1. G kan **både** bevises og modbevises.
  2. G kan **hverken** bevises eller modbevises.
- Da vi har antaget konsistens, må 2 gælde. Det viser ufuldstændighed, og beviset er slut.

Konsekvenser af ufuldstændighedssætningen

Konsekvens af ufuldstændighedssætningen: ZFC (Zermelo-Fraenkel mængdelære) er ufuldstændigt, dvs. kan udtrykke formler som ikke kan afgøres indenfor systemet selv.

Det samme gælder for enhver udvidelse af ZFC!

I "sædvanlig matematisk praksis" er beviser dog udtrykt i naturligt sprog, ikke i rammerne af et formelt system.

Er "sædvanlig matematisk praksis" så fuldstændigt eller ej?

Hilberts program

Gödels resultater afliver også **Hilberts program** (jvf. sidste uges forelæsning).

Gödels anden ufuldstændighedssætning. *Intet formelt system som indeholder talteori kan bevise sin egen konsistens.*

Formel som udtrykker systemets konsistens: $\neg \mathit{bevisbar}(\langle \varphi \wedge \neg\varphi \rangle)$.

Opsummering

- Gödels ufuldstændighedssætning **omtaler udelukkende formelle systemer**, men er ofte fortolket meget mere vidtrækkende.
- Essentielt siger sætningen at **alle formelle systemer er ufuldstændige**, dvs. utilstrækkelige til at afgøre alle formler som kan udtrykkes i dem.
- Gödels bevis gør essentielt brug af **selvreference**—samme idé som ligger bag f.eks. Russells paradoks og løgnerparadokset.
- Selvreference opnås via en **Gödelnummerering**, som muliggør at formler kan tale om andre formler via deres Gödelnumre ("CPR-numre").
- Gödels sætning giver nådesstødet til Hilberts program.