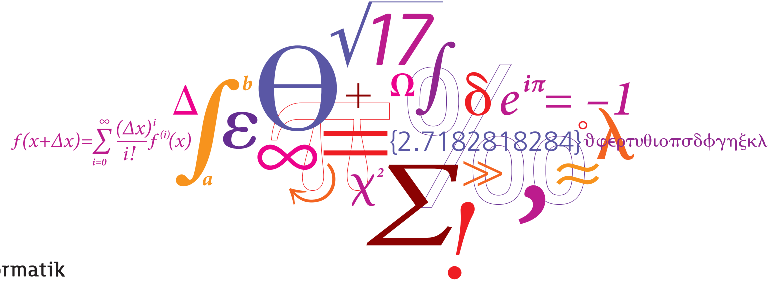
Uendelige rækker og Taylor-rækker

Thomas Bolander, DTU Informatik

Matematik: Videnskaben om det uendelige 1

Folkeuniversitetet i København, efteråret 2010



DTU Informatik
Institut for Informatik og Matematisk Modellering

Forhold mellem endelighed og uendelighed

Et spørgsmål:

Er det muligt på **endelig** *tid at udføre* **uendeligt** *mange på hinanden følgende handlinger? (hver handling tager en tid* > 0 *at udføre).*

Forhold mellem endelighed og uendelighed

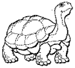
Betragt påstanden som opstår, hvis vi svarer "nej" til ovenstående spørgsmål:

> *Det er ikke muligt på* **endelig** *tid at udføre* **uendeligt** *mange på hinanden følgende handlinger? (hver handling tager en tid* > 0 *at udføre).*

Hvis vi enten eksplicit eller implicit antager at denne påstand er sand, ledes vi frem til at **bevægelse er umulig** i kraft af Zenons berømte paradokser (jvf. kursets første forelæsning), herunder **Achilleus og skildpadden** samt **Zenons dichotomi** (Aristoteles, Fysik VI:9)...

Achilleus og skildpadden

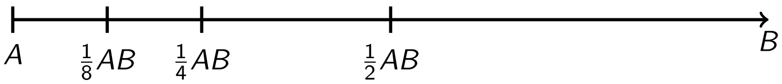
Achilleus løber om kap med den meget langsommere skildpadde. Skildpadden får 100 meters forspring.



Et kort stykke tid efter løbet er begyndt når Achilleus til der hvor skildpadden startede. Men på dette tidspunkt er skildpadden nået et lille stykke videre, lad os sige 10 meter. Det vil nu tage Achilleus lidt yderligere tid at løbe disse 10 meter, hvorefter skildpadden er nået endnu længere (1 meter), og derefter endnu noget tid at nå til dette tredje punkt, mens skildpadden stadig bevæger sig fremad.

Konklusion: hver gang Achilleus når til et punkt hvor skildpadden har været, er der endnu et stykke vej han skal bevæge sig hvis han vil overhale den. Da Achilleus således skal nå uendeligt mange punkter hvor skildpadden allerede har været, kan han aldrig overhale den.

Zenons dichotomi



Hvis en given genstand skal bevæge sig lad os sige fra et givet punkt A til et givet punkt B, så vil genstanden først skulle tilbagelægge halvvejen imellem A og B, dvs. afstanden $1/2AB$. Men for at tilbagelægge afstanden $1/2AB$ må genstanden først tilbagelægge halvdelen af denne afstand, dvs. $1/4AB$. Men for at tilbagelægge $1/4AB$ må genstanden først tilbagelægge $1/8AB$ og så fremdeles. Denne opdeling kan fortsættes i det uendelige.

Konklusion: Genstanden kan aldrig begynde sin bevægelse fra A til B, da den altid må skulle begynde med at tilbagelægge et **uendeligt** antal afstande i en **endelig** tid, hvilket er (antaget) umuligt.

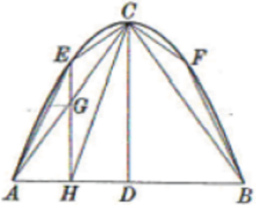
Fra Aristoteles til Archimedes

Aristoteles og hans samtidige havde ikke rådighed over den nødvendige matematik til at løse disse "bevægelsens paradokser" på en tilfredsstillende måde.

Det er først 100 år senere med Archimedes at vi får de første værktøjer til at begynde at kunne løse paradokserne...

Gensyn med parablens kvadratur

I forbindelse med parablens kvadratur (jvf. kursets anden forelæsning) viser Archimedes at arealet under parablen er opadtil begrænset af følgende sum af arealer:



$$\triangle ABC + \frac{1}{4}\triangle ABC + \frac{1}{4^2}\triangle ABC + \frac{1}{4^3}\triangle ABC + \cdots \frac{1}{4^n}\triangle ABC,$$

for alle værdier af n.

Det må betyde at også følgende **uendelige række** har en endelig sum:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

Vi kan altså godt udføre uendeligt mange handlinger på endelig tid, hvis f.eks. den første handling tager tiden 1, den næste tiden $1/4$, den tredje tiden $1/16$, osv.

Uendelige rækker

Uendelig række: Et summationsudtryk med uendeligt mange led. Kan skrives på formen

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

eller den forkortede form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Eksempel.

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$$

Hvilken sum har denne række?

Rækken svarer til den som opstår i paradokset om Achilleus og skildpadden, hvis skildpadden får et forspring på en tiendedel af distancen og Achilleus er 10 gange så hurtig som skildpadden.

Geometriske rækker

Rækken fra forrige slide var et eksempel på en **geometrisk række**. En anden sådan række er følgende:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Hvilken sum har denne række?

Bemærk at dette er rækken som opstår i Zenons dichotomi.

Konvergens og divergens af uendelige rækker

Det faktum at uendelige rækker af positive tal kan have en endelig sum opløser Zenons paradokser (det første eksplicitte argument med denne konklusion blev givet af **Grégoire de Saint-Vincent** i 1647).

Men der er stadig overraskelser i vente med hensyn til at summere uendeligt mange tal...

Nicole Oresme (1323–1382) viser at følgende faldende række af tal—kaldet den **harmoniske række**—ikke har en endelig sum:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Bevis uden ord:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & + & \frac{1}{6} & + & \frac{1}{7} & + & \frac{1}{8} & + & \cdots \\
\vee\!| & & \vee\!| & & \vee\!| & & \vee\!| & & \vee\!| & & \vee\!| & & \vee\!| & & \\
\frac{1}{2} & + & (\frac{1}{4} & + & \frac{1}{4}) & + & (\frac{1}{8} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{8}) & + & \cdots \\
\| & & & \| & & & & & & \| & & & & & \\
\frac{1}{2} & + & & \frac{1}{2} & & + & & & & \frac{1}{2} & & & & + & \cdots
\end{array}$$

Afsnit og afsnitsfølger for uendelige rækker

I dag skelner vi mellem **konvergente** og **divergente** rækker: konvergente rækker er dem som har en entydig endelig værdi, divergente er dem som ikke har det. For at definere disse begreber præcist har vi brug for et par nye termer.

Definition. Lad der være givet en uendelig række $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$. Summen

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

kaldes for rækkens n**'te afsnit**. Talfølgen

$$s_1, s_2, s_3, \ldots$$

kaldes for rækkens **afsnitsfølge**.

Eksempel. Afsnitsfølgen for rækken $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} \cdots$ er

$$1, \frac{11}{10}, \frac{111}{100}, \frac{1111}{1000}, \frac{11111}{10000}, \ldots$$

Konvergens og divergens af uendelige rækker

Vi er nu klar til at definere konvergens og divergens af uendelige rækker.

Definition. En uendelig række $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ siges at være **konvergent** med **summen** s, hvis rækkens afsnitsfølge er konvergent med grænseværdi s, altså hvis s_n går mod s når n går mod uendelig. En uendelig række, der ikke er konvergent, siges at være **divergent**.

Eksempler. Rækken

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \cdots$$

er konvergent med summen $10/9$, da afsnitsfølgen

$$1, \frac{11}{10}, \frac{111}{100}, \frac{1111}{1000}, \frac{11111}{10000}, \cdots = 1, 1.1, 1.11, 1.111, 1.1111, \cdots$$

konvergerer mod dette tal.

Den harmoniske række er divergent.

Konvergens og divergens af uendelige rækker

Bemærk at vi definerede konvergens og divergens ved hjælp af et moderne grænseværdi-begreb. Dette var ikke til rådighed for hverken Aristoteles, Archimedes, Oresme eller Saint-Vincent.

Helt frem i 1800-tallet var der stadig problemer med den grundlæggende forståelse og de grundlæggende begreber vedrørende uendelige rækker...

Flere paradokser med uendelige rækker

Leonard Euler (1707–1783), en af historiens største matematikere, var blot en af mange som kom på glatis når det gjaldt uendelige rækker. Euler betragtede følgende uendelige række, kaldet **Grandis række**:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Sætter vi paranteser i denne række på følgende måde:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

bliver det klart at rækken må have summen 0.

Sætter vi imidlertid paranteserne på følgende måde i stedet:

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$$

får vi summen 1.

En tredje mulighed er at lade s betegne summen af Grandis række og så konstatere at der gælder:

$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - s$$

Heraf konkluderes $s = 1/2$.

Flere paradokser med uendelige rækker

En anden stor matematiker, **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716) nåede også frem til summen $1/2$, men på en anden måde. Han betragtede Grandi-rækkens afsnitsfølge:

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

Eftersom elementerne i afsnitsfølgen skiftevis er 1 og 0 med lige stor sandsynlighed, mente Leibniz man kunne konkludere at summen er gennemsnittet af disse to værdier, dvs. værdien $1/2$. Dette argument blev accepteret af blandt andet **Daniel Bernoulli** (1700–1782).

Selv tidens allerstørste matematikere, og nogen af historiens største matematikere overhovedet, havde altså kvaler med disse uendelige rækker.

I dag ville vi blot konkludere at følgen ikke er konvergent, og at al snak om en sum derfor er meningsløst.

Flere paradokser med uendelige rækker

Matematikeren og filosoffen **Luigi Guido Grandi** (1671–1742) konkluderede at fordi summen af rækken tydeligvis **både** er 0 og $1/2$ kan **verden skabes ud af intet**!

Der er her en klar analogi til Zenons paradokser, hvor konklusionen var at bevægelse er umulig. I begge tilfælde opstår paradokserne på grund af fejlagtige skjulte antagelser, og i begge tilfælde konkluderes universelle og vidtrækkende ting om naturens beskaffenhed.

paradoks:	Zenons paradokser	Grandis paradoks
fejlagtig antagelse:	alle rækker divergerer	Grandi-rækken konvergerer
konklusion:	bevægelse er umulig	verden kan skabes af intet

Vi skal senere i kurset ser mange flere eksempler på paradokser i matematikken, der på lignende vis er opstået som konsekvens af manglende forståelse af uendelighedens væsen.

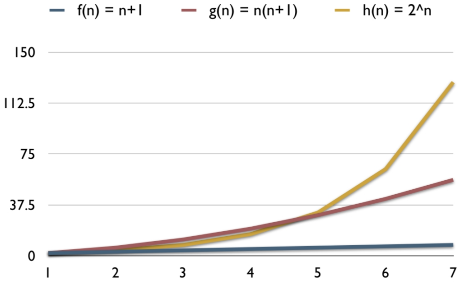
En lille øvelse

Vi ved at den harmoniske række

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

divergerer, mens følgende geometriske række

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$



konvergerer.

Hvad med følgende række, hvis n'te led for alle $n \geq 5$ ligger mellem det n'te led fra den harmoniske række og det n'te led fra den geometriske række?

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Løsning på øvelsen

En (uendelig) metode til at bestemme summen af rækken er følgende:

1. Tag enhedsintervallet og del op i 2. Fjern den ene halvdel. Det fjernede udgør rækkens første afsnit, s_1.
2. Del resten op i 3. Fjern den ene tredjedel. Det fjernede udgør nu s_2.
3. Del resten op i 4. Fjern den ene fjerdedel. Det fjernede udgør nu s_3.
4. Del resten op i 5. Fjern den ene femtedel. Det fjernede udgør nu s_4.
5. ...

Det er klart at vi kan blive ved med at fjerne mere og mere af enhedsintervallet, men også at vi aldrig får brug for mere end dette enhedsinterval. Med andre ord gælder at rækkens sum er både mindst 1 og højst 1, det vil sige, 1.

En mere algebraisk løsning på øvelsen

En mere algebraisk fremgangsmåde er følgende. Bemærk først at der gælder:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Dette kan benyttes til at lave følgende omskrivninger:

$$\begin{aligned}
s_n &= \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \tfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \tfrac{1}{n(n+1)} \\
&= (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \cdots + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}) \\
&= 1 + (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) + (-\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}) + \cdots + (-\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n}) - \tfrac{1}{n+1} \\
&= 1 - \tfrac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Det ses nu let at s_n må gå mod 1 når n går mod uendelig.

Hvorfor er det pludselig OK at flytte rundt på paranteserne før vi ved om rækken konvergerer eller ej?

Rækker og approksimationer

Uendelige rækker har en enorm betydning i den moderne matematik og datalogi, især fordi disse rækker giver anledning til måder at **approksimere** tal og funktioner på.

Denne anvendelse blev studeret allerede af Newton, Euler og Leibniz m.fl.

Rækker og approksimationer

Leibniz viste i 1674 følgende berømte resultat:

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \cdots$$

Dette giver en måde at beregne approksimationer af tallet π på, da ethvert afsnit af den uendelige række vil være en approksimation til π, og da vi kan få en vilkårlig præcis approksimation blot ved at medtage tilstrækkeligt mange led.

Leibniz' række tilnærmer sig π ret langsomt (der kræves næsten 300 led for blot at få de første 2 decimaler rigtigt). Moderne computere beregner i stedet π via følgende noget mere sofistikerede række, som blev fundet af Chudnovsky-brødrene i 1987:

$$\frac{426880\sqrt{10005}}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!(13591409 + 545140134n)}{(3n)!(n!)^3(-640320)^{3n}}$$

Denne række giver 14 rigtige decimaler per led!

Approksimationer af funktioner

En endnu større anvendelsesmæssig betydning har brugen af uendelige rækker til at approksimere **funktioner**. **James Gregory** (1638–1675), Newton, Brook Taylor (1685–1731), Bernoulli og **Colin Mclaurin** (1698–1746) arbejdede alle på dette problem (delvist uafhængigt).

Mclaurin viste at der for enhver uendeligt differentiabel funktion $f(x)$ gælder følgende:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Dette er et specialtilfælde af det der i dag kaldes **Taylors sætning**, og den uendelige række kaldes i det generelle tilfælde en **Taylor-række**.

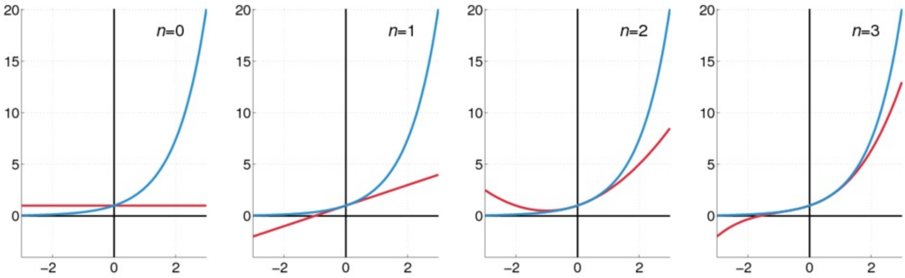
Vi ved i dag at formlen ikke nødvendigvis gælder for alle værdier af x, men kun indenfor et såkaldt **konvergens-interval** rundt om $x = 0$. Dette interval er naturligvis afhængigt af valget af funktionen $f(x)$. Hverken Taylor eller Mclaurin adresserede disse konvergensproblemer.

Taylor-rækker

Betragt igen Mclaurins formel:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Approksimationerne formlen giver anledning til kan illustreres med følgende eksempel, hvor den blå kurve (eksponentialfunktionen) tilnærmes af den røde (afsnit af den uendelige række):



1 led 2 led 3 led 4 led

Anvendelser af Taylor-rækker

Taylor-rækker har mange anvendelser:

- Integration af komplicerede funktioner, som ikke kan integreres med andre midler.
- Løsning af komplicerede differentialligninger.
- Generelt approksimationer af funktioner på computer.

Senere i kurset skal vi se på **Fourier-rækker**, som er en alternativ metode til at approksimere funktioner via uendelige rækker. Disse afviger fra Taylor-rækker ved at de funktioner man tilnæmer med er sinus-funktioner fremfor polynomier. Fourier-rækker ligger blandt andet bag langt de fleste moderne komprimeringsalgoritmer for billed, lyd og video, f.eks. JPEG- og MPEG-kompressioner. Fourier-rækker og deres slætninge benyttes også i dag til f.eks. ansigtsgenkendelse.

Kort sagt: De berømte matematikeres kamp for at forstå de uendelige rækkers inderste væsen har på ingen måde været spildte, og de fleste mennesker er i dag dagligt i berøring med teknologier, som kun er mulige som følge af disse matematikeres indsigter og teoretiske landvindinger.