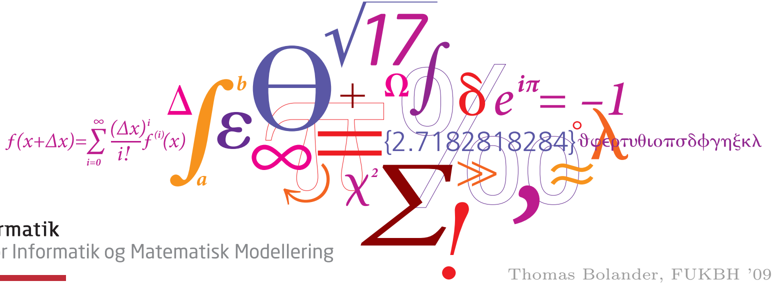
Matematikkens paradokser og patologiske konstruktioner i 1800-tallet

Thomas Bolander, DTU Informatik

Matematik: Videnskaben om det uendelige
Folkeuniversitetet i København, efteråret 2009



Matematikkens patologiske eksempler

- Typisk konkrete matematiske objekter: tal, mængder, kurver, figurer el.lign.
- Objekter som bryder egenskaber man ellers implicit eller eksplicit har troet var universelt gyldige.
- Ofte er det modeksempler på regelmæssigheder af formen "alle A er B" eller, mere matematisk formuleret, "for alle x gælder, at hvis x har egenskaben A, så har den også egenskaben B".
- Eksempler fra "hverdagen": Alle svaner er hvide, alle får har ét hoved. En sort svane er et modeksempel på første regelmæssighed.

Patologiske eksempler fra matematikkens historie

I kurset har vi fokuseret en del på matematiske objekter som i samtiden har været opfattet som patologiske (i bred betydning), fordi de har forbrudt sig mod opfattede regelmæssigheder:

- Alle tal er rationelle (antikken). *Modeksempel*: $\sqrt{2}$. Beviset for at $\sqrt{2}$ er irrationelt siges at have kostet Hippasus liv.
- Alle figurer som har et endelig volumen har også et endeligt areal (antikken—der findes kun potentiel uendelighed). *Modeksempel*: Torricellis rør.
- Enhver uendelig sum af tal > 0 er uendelig (antikken—implicit). *Modeksempel*: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$.
- Alle reelle tal kan specificeres ved en endelig sproglig beskrivelse. *Modbevis*: Mængden af reelle tal er overtællelig.

Patologiske eksempler som drivkraft i matematikken

Patologiske eksempler har ofte skabt uro i samtiden, men har for det meste vist sig at lede til dybere matematisk forståelse, nye vigtige begrebsdannelser og større indblik i matematikkens forunderlige univers.

Man kunne også sige: overhovedet at opfatte et matematisk objekt som patologisk er et tegn på at ens forventninger til den matematiske virkelighed ikke stemmer overens med denne virkelighed (jvf. "alle svaner er hvide"). Så der er basis for at erobre nyt land og udvide ens begreber og forståelse.

Patologiske eksempler i 1800-tallet

- I 1800-tallet bliver uendelige metoder mere almindelige, samtidig med at man har fået matematisk hold på begreber som kontinuitet og differentiabilitet.
- Der viser sig dog at være en diskrepans mellem begrebernes intuitive betydning og deres reelle matematiske egenskaber. Det giver anledning til en række nye patologiske objekter.
- En på den tid forventet regelmæssighed er følgende: Enhver kontinuert kurve er stykkevis differentiabel (dvs. differentiabel næsten overalt). *Modeksempel*: Weierstrass-funktionen...

Weierstrass-funktionen (1872)

Weierstrass-funktionen er speciel ved at være kontinuert uden at være differentiabel i noget punkt. Bolzano var først med en sådan funktion (1830), men Weierstrass' eksempel endte med at blive væsentligt mere kendt.

Forskrift for Weierstrass-funktionen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cos(11^n \pi x)$$

(parametrene $\frac{1}{2}$ og 11 kan ændres indenfor passende intervaller).

Man kan selv plotte approksimationer til funktionen ved at downloade det gratis matematik-program `Maxima`: http://maxima.sourceforge.net/

Følgende kommando vil eksempelvis plotte de første 3 led af $f(x)$ i intervallet $[0, \frac{1}{2}]$:

```
plot2d(sum(.5*cos(11^n*x*%pi),n,0,2),[x,0,0.5]);
```

Blancmange-funktionen (1903)

- Det ser ud til at små udsnit af Weierstrass-funktionen har mere eller mindre samme form som hele Weierstrass-funktionen.
- For at studere dette nærmere ser vi på et lidt simplere eksempel, nemlig blancmange-funktionen, som deler Weierstrass-funktionens skæbne: kontinuert men intet sted differentiabel.

Forskrift for blancmange-funktionen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} g(2^n x),$$

hvor funktionen g er periodisk med periode 1 og følgende forskrift i intervallet $[0, 1]$:

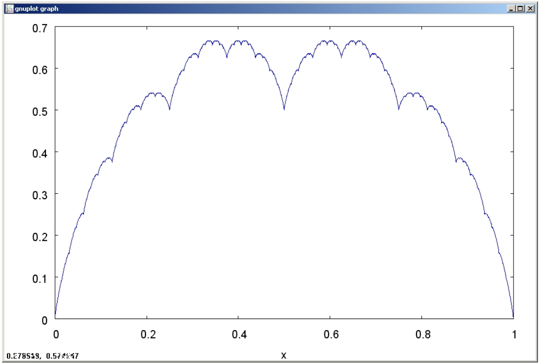
$$g(x) = \frac{1}{2} - \left| \frac{1}{2} - x \right|, x \in [0, 1]$$

Mere om blancmange-funktionen

Programmet `Maxima` kan også bruges til at eksperimentere med at plotte forskellige udsnit og approksimationer til blancmange-funktionen.

For at plotte de første 50 led af blancmange-funktionen i intervallet $[0, 1]$ gives kommandoen:

```
g(x) := 0.5 - abs(0.5 - (abs(x)-floor(abs(x))));
plot2d(sum(2^(-n)*g(2^n * x), n, 0, 49), [x, 0, 1]);
```



Selv-similaritet

- Det er let at både at se og bevise at blancmange-kurven er *selv-similær*: Vi kan genfinde hele kurven i vilkårligt små udsnit af den. Ligegyldigt hvor meget vi "zoomer ind" kan vi altså genfinde små kopier af hele kurven, som igen indeholder små kopier af hele kurven, osv.
- Vi har altså at gøre med en helhed som indeholder en kopi af sig selv som ægte delmængde.
- En helhed som har denne egenskab må nødvendigvis være et uendeligt objekt.

Kochs kurve (1904)

Metoden som blev benyttet til at generere blancmange-kurven kan bruges til at konstruere mange andre spændende selv-similære kurver.

Et eksempel er Kochs kurve. Kochs kurve opstår ved først at tegne et liniestykke og dernæst gentage følgende 2 trin ad infinitum:

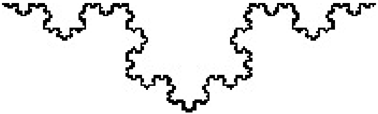
1. Tag hvert liniestykke som indtil videre er tegnet og del i tre lige lange delstykker.
2. Erstat det midterste delstykke med en udadvendt “savtak” med sidelængde lig længden af delstykket.

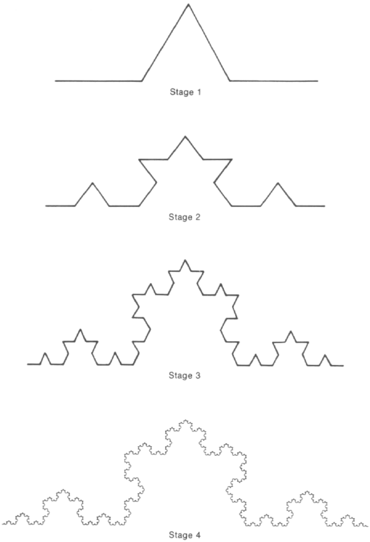
Resultatet bliver en selv-similær kurve fordi processen gentages uendeligt med flere og flere mindre og mindre savtakker.

Mere om Kochs kurve

Til højre er angivet de første trin i processen som generer Kochs kurve.

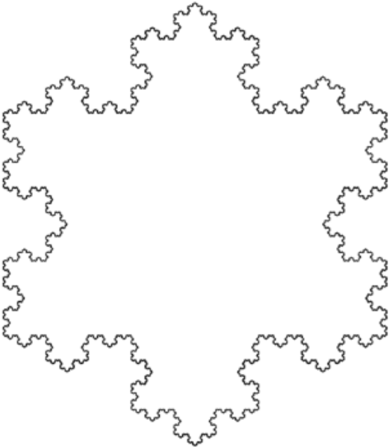
Nedenfor vises hvordan det vil se ud hvis man kontinuerligt zoomer længere og længere ind på Kochs kurve (animationen vil kun blive vist hvis du benytter en af Adobes PDF-læsere):





Kochs snefnug

Hvis man i processen som generer Kochs kurve starter med en ligesidet trekant i stedet for blot et liniestykke får man figuren der er kendt som Kochs snefnug:



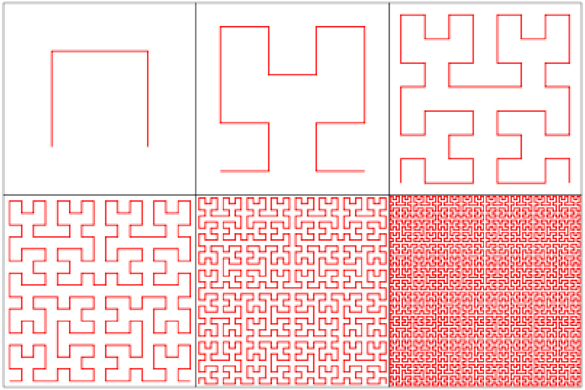
Matematisk julepynt...

Egenskaber ved Kochs snefnug

- Hvordan ved vi at Kochs snefnug overhovedet eksisterer, dvs. hvordan beviser vi at den uendelige proces som skulle generere den faktisk konvergerer mod en veldefineret kurve?
- Hvor lang er kurven som udgør Kochs snefnug? Den er uendelig. Hvordan ses det?
- At kunne inkludere en lukket uendelig kurve som ikke skærer sig selv i et endeligt areal virker ganske patologisk og kontra-intuitivt i sig selv (lidt som Torricellis rør). Men det kan blive endnu være...

Peanos kurve (1890)

I 1890 viser Peano hvordan man ved en tilsvarende teknik som benyttet i Kochs snefnug kan generere en uendelig kurve som udfylder hele enhedsarealet [0,1] X [0,1] i planen.



Men er det så overhovedet en kurve?

Intuitionens fald

- De hidtil givne patologiske eksempler strider alle på den ene eller den anden måde mod vores gængse matematiske intuition.
- Måske gælder dette især Peanos kurve, hvis eksistens stadig i dag er i direkte modstrid med de fleste menneskers intuitive forståelse af dimensionalitet, idet den på én gang synes at være en kurve (1-dimensional) og en flade (2-dimensional).
- De patologiske eksempler gav da også i samtiden anledning til en del uro i det matematiske miljø...

Citater

- “Når man førhen indførte en ny funktion, så skete det med blikket rettet mod et eller andet praktisk formål; i dag indfører man dem eksplicit for at finde fejl i vore forfædres overvejelser, og det er den eneste gevinst man får fra dem” (Poincaré 1889).
- “Men denne elegante udledning/udvikling er pålagt en forbandelse. Analysen tager med den ene hånd hvad den anden giver. Jeg vender mig med afsky og rædsel fra denne sørgelige plage af kontinuerte funktioner uden en afledet” (Hermite til Stieltjes 1893).

Hausdorff-dimension

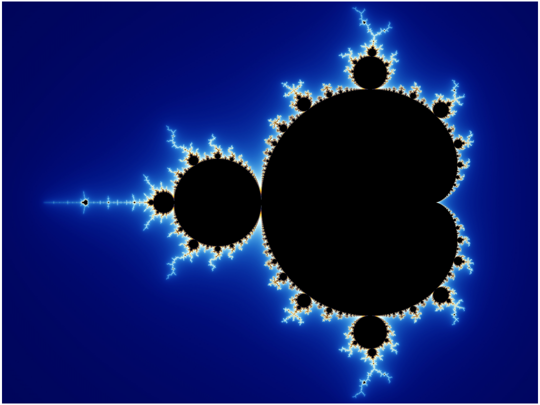
- Trods samtidens kritiske røster har de patologiske eksempler været afgørende for den matematiske udvikling.
- Mange geometriske begreber er blevet generaliseret, herunder dimensions-begrebet. I 1918 introducerede Hausdorff et nye dimensions-begreb, Hausdorff-dimension, ifølge hvilken en mængde kan være n-dimensionalt uden at n behøver at være et heltal.
- Eksempelvis har Cantor-mængden fra sidste uge Hausdorff-dimension 0.6309, mens Koch-kurven har dimension 1.2619.

Fraktaler

Samtlige af de i det foregående betragtede patologiske kurver går under det som i dag kaldes for fraktaler.

Fraktaler er typisk karakteriseret ved at være selv-similære og have en Hausdorff-dimension som ikke er et heltal.

Et berømt eksempel på en sådan fraktal er Mandelbrot-mængden vist til højre.



Anvendelse af fraktaler

- Opdagelsen og udviklingen af fraktaler har ikke været hel forgæves, til skamme for de som insisterede på at der var tale om patologiske objekter som ikke hørte naturligt hjemme i matematikken.
- Fraktale mønstre forekommer mange steder i naturen. Som Mandelbrot udtalte i 1975: "Skyer er ikke kugler, bjerge er ikke kegler, kystlinier er ikke cirkler, bark er ikke glat, og lys bevæger sig ikke langs rette linier."
- Fraktaler har fundet anvendelser indenfor så forskelligartede områder som enzymologi, signal- og billed-kompression, antenne-design og seismologi m.m.
- Fraktaler har også været rigt anvendt i kunsten, f.eks. i Per Nørgårds kompositioner fra slutningen af 60'erne.