Matematik: Videnskaben om det Uendelige II

Udvalgsaksiomet

Russell's Paradox

There is just one point where I have encountered a difficulty. You state (p. 17) that a function too, can act as the indeterminate element. This I formerly believed, but now this view seems doubtful to me because of the following contradiction. Let *w* be the predicate: to be a predicate that cannot be predicated of itself. Can *w* be predicated of itself? From each answer its opposite flows. Therefore we must conclude that *w* is not a predicate. Likewise there is no class (as a totality) of those classes which, each taken as a totality, do not belong to themselves. From this I conclude that under certain circumstances a definable collection [Menge] does not form a totality.

Komprehensionsaksiomet: Enhver egenskab P definerer en mængde A

$$A = \left\{ x \middle| P(x) \right\}$$

Lad P være egenskaben $x \notin x$, hvilket giver mængden

$$M = \left\{ x \middle| x \notin x \right\}$$

Om M gælder

$$M \in M \Leftrightarrow M \notin M$$

Zermelo's Axioms

l. Set theory is concerned with a *domain* $\mathcal{B}$ *of individuals, which we shall call* simply *objects and among which are the sets. If two symbols, a and b, denote the same* object, we write *a = b, otherwise a # b. We say of an object a that it "exists" if it* belongs to the domain $\mathcal{B}$; likewise we say of a class $\mathcal{A}$ of objects that "there exist objects of the class $\mathcal{A}$ " if $\mathcal{B}$ contains at least one individual of this class.

2. Certain *fundamental relations of the form a ε b obtain between the objects of* the domain $\mathcal{B}$. If for two objects *a and b the relation a ε b holds, we say "a is an element of the set b", "b contains a as an element", or "b possesses the element a".* An object *b may be called a set if and-with a single exception (Axiom II)---only if* it contains another object, *a, as an element.*

3. If every element *x of a set M is also an element of the set N, so that from x ε M* it always follows that *x ε N, we say that M is a subset of N and we write M€ N.* We always have *M€ M, and from M€ N and N€ R it always follows that M€ R.* Two sets *M and N are said to be disjoint if they possess no common element, or if* no element of *M is an element of N.*

4. A question or assertion $\mathcal{Q}$ is said to be *definite if the fundamental relations of the* domain, by means of the axioms and the universally valid laws of logic, determine without arbitrariness whether it holds or not. Likewise a "propositional function" [" Klassenaussage"] *$\mathcal{Q}$(x), in whieh the variable term x ranges over all individuals of* a class $\mathcal{A}$, is said to be definite if it is definite for *each single individual x of the class* $\mathcal{A}$. Thus the question whether *a ε b or not is always definite, as is the question whether M€ N or not.*

Zermelo's Axioms I-V

AXIOM I. (Axiom of extensionality [Axiom der Bestimmtheit].) If every element of a set *M is also an element of N and vice versa, if, therefore, both M€ N and N€ M, then always M = N; or, more briefly: Every set is determined by its* elements.

AXIOM II. (Axiom of elementary sets [Axiom der Elementarmengen].) There exists a (fictitious) set, the *null set, O, that contains no element at all. If a is any* object of the domain, there exists a set *{a} containing a and only a as element; if a* and *b are any two objects of the domain, there always exists a set {a, b} containing* as elements *a and b but no object x distinct from both.*

AXIOM III. (Axiom of separation [Axiom der Aussonderung].) Whenever the propositional function $\mathfrak{Q}(x)$ is definite for all elements of a set M, M possesses a subset $M_{\mathfrak{Q}}$ containing as elements precisely those elements x of M for which $\mathfrak{Q}(x)$ is true.

AXIOM IV. (Axiom of the power set [Axiom der Potenzmenge].) To every set *T* there corresponds another set *$\mathfrak{U}T$, the power set of T, that contains as elements* precisely all subsets of *T.*

AXIOM V. (Axiom of the union [Axiom der Vereinigung].) To every set *T there* corresponds a set *$\mathfrak{S}T$, the union of T, that contains as elements precisely all elements* of the elements of *T.*

Zermelo's Axioms VI-VII

AXIOM VI. (Axiom of choice [Axiom der Auswahl].) If T is a set whose elements all are sets that are different from O and mutually disjoint, its union $\cup T$ includes at least one subset S_1 having one and only one element in common with each element of T.

The preceding axioms suffice, as we shall see, for the derivation of all essential theorems of general set theory. But in order to secure the existence of infinite sets we still require the following axiom, which is essentially due to Dedekind.

AXIOM VII. (Axiom of infinity [Axiom des Unendlichen].) There exists in the domain at least one set Z that contains the null set as an element and is so constituted that to each of its elements a there corresponds a further element of the form $\{a\}$, *in* other words, that with each of its elements a it also contains the corresponding set $\{a\}$ as an element.

ZFC

Strukturelle aksiomer

ZF1. *Extensionalitetsaksiomet.* To mængder a og b er identiske, hvis, og kun hvis, de har de samme elementer

$$\forall a \forall \mathrm{b}[a = b \leftrightarrow \forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \in b)]$$

ZF2. *Funderingsaksiomet.* Det er ikke muligt i nogen mængde$a$at finde en uendelig nedadstigende kæde

$$\cdots \in x_3 \in x_2 \in x_1 \in x_0 \in a$$

elementer i a, hvilket udtrykkes formelt således

$$\forall a\,[\exists x\,(x \in a) \rightarrow \exists x\,(x \in a \wedge \forall y\,(y \notin x))]$$

ZFC

Eksistensaksiomer

ZF3. *Den tomme mængde.* Der findes en mængde a uden elementer

$$\exists a \forall x \, [x \in a \leftrightarrow x \neq x]$$

Den tomme mængde er entydigt bestemt og betegnes $\emptyset$.

ZF4. *Uendelighedsaksiomet.* Der findes en mængde a, i hvilket der er en opadstigende kæde

$$x_0 \in x_1 \in x_2 \in \cdots \in a$$

af elementer. Formelt kan det udtrykkes således

$$\exists a \, [\exists x \in a \wedge \forall x \, [x \in a \rightarrow \exists y \, (y \in a \wedge x \in y)]]$$

ZFC

Konstruktionsaksiomer

ZF5. *Par-sksiomet.* Hvis a og b er mængder, så er $\{a, b\}$ også en mængde.

Det vil sige, at funktionen

$$(a, b) \longrightarrow \{a, b\}$$

er veldefineret. Dette kan udtrykeks formelt på denne måde

$$\forall a \forall b \exists c \forall x \, [x \in c \leftrightarrow x = a \wedge x = b]$$

ZF6. *Foreningsmængdeaksiomet.* Hvis a er en mængde af mængder, så kan man danne en mængde bestående af foreningen af alle mængderne i a. Det vil sige, at funktionen

$$a \mapsto \cup a$$

er veldefineret. Formelt udtrykeks det således

$$\forall a \exists c \forall x \, [x \in c \leftrightarrow \exists y \, (y \in a \wedge x \in y)]$$

ZFC

ZF7. *Potensmængdeaksiomet.* Til enhver mængde a kan man danne potensmængden $P(a)$ af a, som består af alle delmængder af a. Det vil sige, at funktionen

$$a \mapsto P(a)$$

er veldefineret. Formelt udtrykkes dette ved

$$\forall a \exists c \forall x\, [x \in c \leftrightarrow x \subseteq a]$$

ZF8. *Delmængdeaksiomet.* Antag, at mængden a allerede er dannet, og at $\varphi(x)$ er en veldefineret formel. Da kan vi danne mængden $\{x \mid x \in a \wedge \varphi(x)\}$. Det vil sige, at funktionen

$$a \mapsto \{x \in a \wedge \varphi(x)\}$$

er veldefineret. Det formelle aksiom er

$$\forall a \exists c \forall x\, [x \in c \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x)]$$

ZF9. *Adskillelsesaksiomet.* Hvis mængden a allerede er dannet, og $\varphi(x, y)$ definerer en funktion på a, da kan vi danne billedmængden

$$\{y \mid \exists x\, [x \in a \wedge \varphi(x, y)]\}$$

Aksiomet ser formelt således ud

$$\forall a\, [\forall x \in a \exists! y \varphi(x, y) \rightarrow \exists b\, [\forall y\, (y \in b \rightarrow \exists x \in a \varphi(x, y))]]$$

Udvalgsaksiomet

ZF10: Udvalgsaksiomet. Hvis a er en mængde af mængder, som alle er ikke-tomme og disjunkte, så findes der en mængde b, som består af netop eet element fra hver af mængderne i a

$$\forall a[\forall x[x \in a \rightarrow x \neq \emptyset \wedge \forall y(y \in z \rightarrow x \cap y = \emptyset \vee x = y)]$$

$$\rightarrow \exists b \forall x \exists v(x \in z \rightarrow b \cap x = \{v\})]$$

Relationer

R er en relatiom på mængden M betyder

$$R \subseteq M \times M$$

Vi skriver xRy i stedet for (x,y)$\in$MxM

Eksempler

Ordningen < af tallene

a$|$b ”det naturlige tal a går op i det naturlige tal b”

A$\equiv$B ”figuren A er kongruent med figuren B”

h$\perp$k ”linjen h er vinkelret på linjen k”

Krav til Relationer

Refleksiv xRx

Symmetrisk $xRy \Rightarrow yRx$

Antisymmetrisk $xRy \land yRx \Rightarrow x=y$

Asymmetrisk $xRy \Rightarrow \neg yRx$

Transitiv $xRy \land yRz \Rightarrow xRz$

Total $xRy \lor yRx \lor x=y$

Euklidisk $xRy \land xRz \Rightarrow yRz$

Seriel For alle x findes der et y, så xRy

Streng Partiel Ordning: Asymmetrisk og transitiv

Partiel Ordning: Refleksiv, antisymmetrisk og transitiv

Streng Total Ordning: Antisymmetrisk, transitiv og total

Total Ordning: Refleksiv, antisymmetrisk, ransitiv og total

Velordning: Streng total ordning, hvor enhver ikke-tom delmængde (af grundmængden) har et mindste element

Ordinaltallene

$$0 = \varnothing$$

$$1 = \{\varnothing\}$$

$$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

$$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

$$\vdots$$

$$n + 1 = n \cup \{n\}$$

$$\vdots$$

$$\omega = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \cdots\}$$

$$\omega + 1 = \omega + \{\omega\}$$

$$\vdots$$

$$\omega + \omega = \bigcup_{n<\omega} (\omega + n)$$

$$\vdots$$

Tallene konstrueres ud fra to regler:

1. Efterfølgertal: $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$

2. Limestal: $\alpha + \beta = \bigcup_{\lambda<\beta} (a + \lambda)$

Ordinal-aritmetik

Addition

$$\alpha + 0 = \alpha$$
$$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$$
$$\alpha + \gamma = \bigcup_{\lambda<\gamma} (\alpha + \lambda)$$

Multiplikation

$$\alpha \cdot 0 = 0$$
$$\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$$
$$\alpha \cdot \gamma = \bigcup_{\lambda<\gamma} (\alpha \cdot \lambda)$$

Potensopløftning

$$\alpha^0 = 1$$
$$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$$
$$\alpha^\gamma = \bigcup_{\lambda<\gamma} \alpha^\lambda$$

Regneregler:

$$(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta)$$
$$\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \delta = \alpha \cdot (\beta \cdot \delta)$$
$$\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$$
$$\alpha \cdot (\beta + \delta) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta$$
$$(\alpha + \beta) \cdot \delta = \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \delta$$

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\delta = \alpha^{\beta+\delta}$$
$$(\alpha^\beta)^\delta = \alpha^{\beta\delta}$$

Kardinaltal

Endelige ordinaltal og kardinaltal er identiske.
De uendelige kardinaltal kan indføres således:

$$\aleph_0 = \omega$$
$$\aleph_{n+1} = (\aleph_n)^+$$
$$\aleph_\gamma = \bigcup_{\lambda<\gamma} \aleph_\lambda$$

eller under forudsætning af den generelle kontinuumshypotese:

$$\aleph_0 = \omega$$
$$\aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}$$
$$\aleph_\gamma = \bigcup_{\lambda<\gamma} \aleph_\lambda$$

Regneregler:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$
$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$
$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$
$$\lambda^\alpha \cdot \lambda^\beta = \lambda^{\alpha+\beta}$$
$$(\alpha \cdot \beta)^\lambda = \alpha^\lambda \cdot \beta^\lambda$$

Vitali-mængder

Giuseppe Vitali (1875-1932)

Betragt den additive gruppe $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, hvor elementerne er

$$[r] = r + \mathbb{Q}$$

Hvert element [r] er tæt i R, og alle elementerne er disjunkte

$$[r] \cap [s] = r + \mathbb{Q} \cap s + \mathbb{Q} = \emptyset$$

Endvidere er

$$[r] \cap [0,1] \neq \emptyset, \text{ for alle r}$$

Vi kan derfor, ved anvendelse af udvalgsaksiomet, finde en mængde V, som er indeholdt i [0,1], og som indeholder én repræsentant for hvert [r], dvs.

$$V = \left\{ r + q_r \middle| r \in \mathbb{R}, q_r x \in \mathbb{R} \right\}$$

Vitali-mængder er ikke målelige

Antag V målelig og lad q_1, q_2, ... være en nummerering af $\mathbb{Q}$.
Mængderne $V_k = V + q_k = \{v + q_k | v \in V,\}$ er parvise disjunkte og vi har

$$[0,1] \subseteq \bigcup_k V_k \subseteq [-1,2]$$

Derfor gælder

$$1 \leq \sum_k m(V_k) \leq 3$$

men

$$m(V_k) = m(V)$$

derfor er

$$\sum_k m(V_k) = \infty$$

Altså modstrid.

Banach-Tarski's Paradoks

Det er muligt, giver udvalgsaksiomet, at dekomponere en kugle og samle stykkerne sammen igen til to kugler, som er kongruente med den første.

Ækvivalenser til Udvalgsaksiomet

Velordningssætningen: Enhver ikke-tom mængde kan velordnes.

Kartesiske produkter: Kartesiske produkter af ikke-tomme mængder er ikke-tomme.

Zorns Lemma: Hvis enhver kæde i en partielt ordnet mængde har et største element, så har mængden et maksimalt element.

En kæde K i en partielt ordnet mængde er en total ordnet delmængde.

Et maksimalt element, m, er et element, hvorom det gælder, at der ikke findes nogen elementer, som er større end m.

Goodstein Følger

Lad m være et naturligt tal. Definer en talfølge g(m) ved

1. Første element er m
2. Andet element : Skriv m fuldt ud i totalssystemet, udskift alle to-taller med tre-taller og træk 1 fra
3. Tredje element: Skriv Andet element fuldt ud i 3-talssystemet, udskift all 3-tal med 4-tal og træk 1 fra

…

n. n-te element: Skriv det n-1'te element fuldt ud I n-talssystemet, udskift alle n'er med (n+1)'er og træk 1 fra.

…

g(3) = (3,3,3,2,1,0,…)

g(4) = (4,26,41,60,83,109,139, …)

G(m)=mindste k så k'te led i g(m) er 0

G(3) = 6, G(4) = $3.2^{402655211} \sim 6{,}895 * 10^{121210694}$

Goodsteins Sætning: For alle naturlige tal er G(n) et endeligt tal, dvs. alle Goodstein-følger er endelige.

Goodsteins sætning er uafgørlig i PA, men kan bevises i ZFC

Kontinuumshypotesen

Cantors kontinuumshypotese siger, at der ikke findes nogen mædtigheder mellem mægtigheden af de naturlige tal og mægdigheden af de reelle tal.

Da mægtigheden af de reelle tal er lig med mægtigheden af mængden af delmængder af de naturlige tal kan kontinuumshypotesen udtrykkes formelt ved

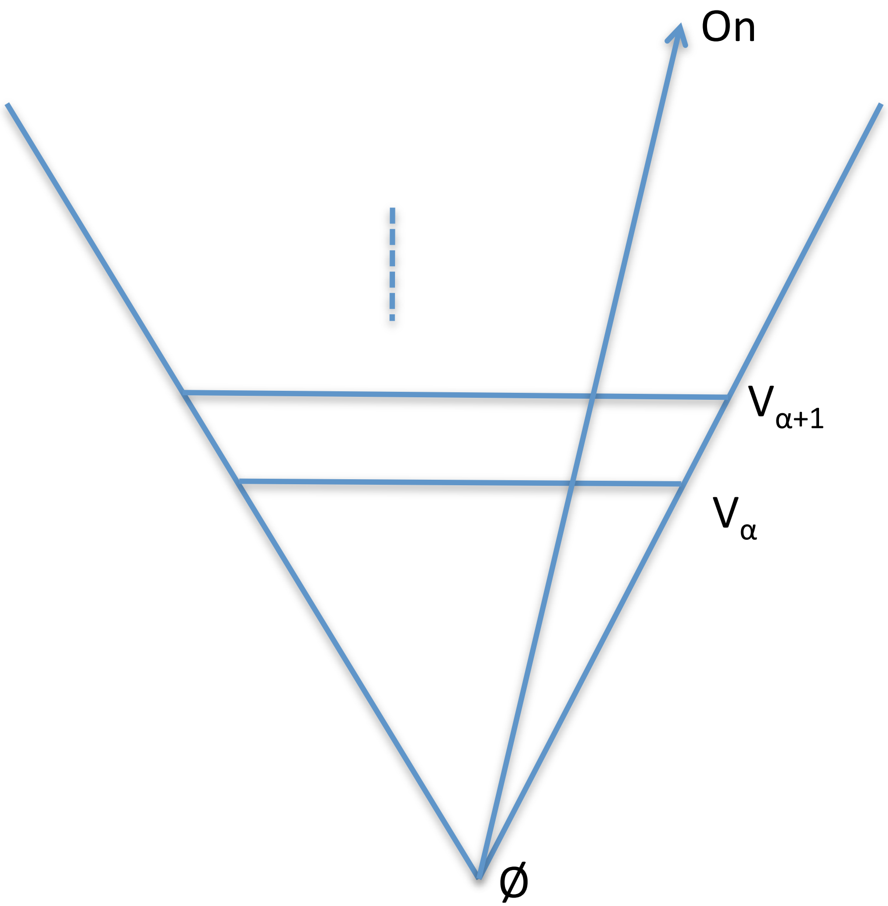
$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$

Den generelle kontinuumshypotese siger, at der ikke er nogen mægtigheder mellem M og mængden af delmængder af M.

Udtrykt formelt

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$$

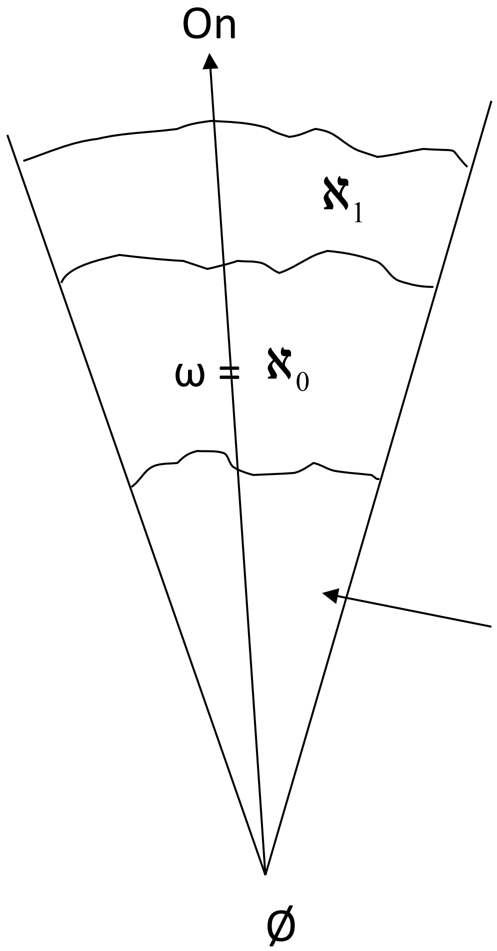
Det kommulative mængdehierarki



$$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$$

$$V_\gamma = \bigcup_{\lambda<\gamma} V_\lambda \qquad \lim(\gamma)$$

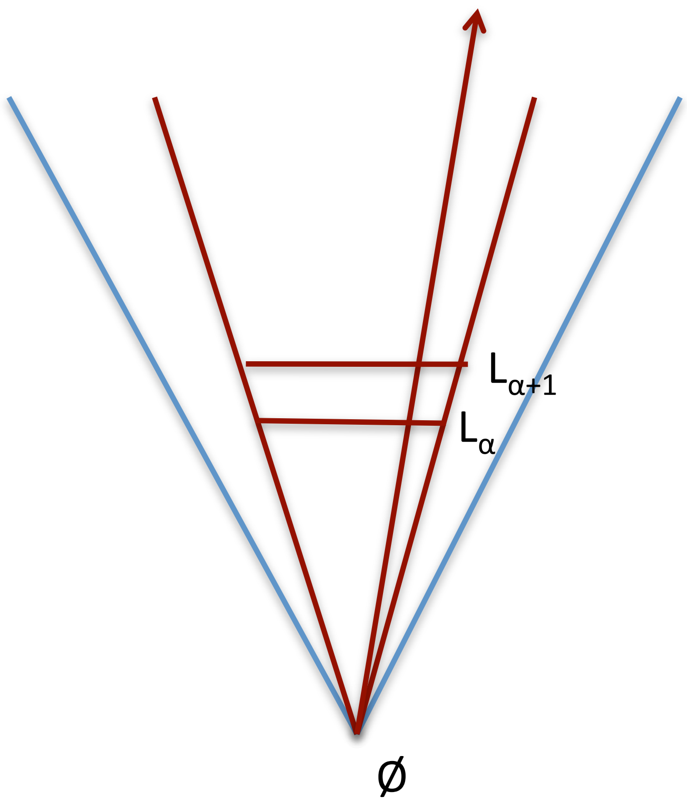
The Cumulative Hierarchy



$$\varnothing, P(\varnothing), P(P(\varnothing)), \cdots$$

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing\}\}\}, \cdots$$

Det konstruktive hierarki



$$L_{\alpha+1} = \{a \mid \phi(a, b_1, \cdots, b_n), b_1 \in L_\alpha, \cdots, b_n \in L_\alpha\}$$

$$L_\gamma \quad = \bigcup_{\lambda<\gamma} L_\lambda \quad \lim(\gamma)$$